



FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE SAINT JÉRÔME

SUJETS D'EXAMEN LMD

<i>Cycle</i>	LICENCE
<i>Série</i>	M1 – Eléments d'analyse
<i>Années</i>	2005-

Attention : un sujet peut comporter plusieurs pages

© 2005 - Université Paul Cézanne Aix-Marseille 3 - FST - BU

Toute reproduction, totale ou partielle, de ce document, est interdite sans le consentement express de son auteur

**EXAMEN DE M1
SESSION JANVIER 2007
DURÉE 3 HEURES**

Toute réponse doit être justifiée ; la clarté du raisonnement sera prise en compte dans la notation.

Documents et calculatrices interdits.

Questions de Cours

- (1) Énoncer le théorème de Rolle.
- (2) Démontrer le théorème de Rolle.
- (3) Donner la définition de la fonction $x \rightarrow \text{Arccos}(x)$. Quel est son domaine de définition ? Quelle est sa dérivée ?
- (4) Montrer que, si la limite d'une suite existe, elle est unique.

Exercice 1: On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique α dans l'intervalle $]0, 1/2[$.
- (2) Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
- (3) Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
- (4) Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
- (5) Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .
- (6) Pourrait-on conjecturer ce résultat graphiquement ?

Exercice 2: Soient x et y réels avec $0 < x < y$.

- (1) Montrer que

$$x < \frac{y - x}{\ln y - \ln x} < y.$$

[[On appliquera le théorème des accroissements finis à $x \rightarrow \ln x$.]]

- (2) On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par
- $$\alpha \mapsto f(\alpha) = \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y) - \alpha \ln x - (1 - \alpha) \ln y.$$
- Montrer que f est deux fois dérivable sur $[0, 1]$. Calculer f' et f'' .
- (3) Montrer que f' est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Montrer que $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$. [[Utiliser la première question.]]
- (4) Montrer qu'il existe c unique dans $[0, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.
- (5) Etablir le tableau de variation de f .
- (6) De l'étude de f , déduire que pour, tout α de $]0, 1[$,
- $$\alpha \ln x + (1 - \alpha) \ln y < \ln(\alpha x + (1 - \alpha)y).$$

Donner une interprétation géométrique.

Exercice 3:

- (1) Soit la fonction $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$. Montrer que f admet une réciproque que l'on explicitera.
- (2) Trouver un intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction $g(x) = \tan(x^3)$ admette une fonction réciproque. Déterminer la bijection réciproque (on précisera le domaine de définition de cette réciproque et son image).

**EXAMEN DE M1
DEUXIÈME SESSION
SEPTEMBRE 2006**

Toute réponse doit être justifiée ; la clarté du raisonnement sera prise en compte dans la notation.

Documents et calculatrices interdits.

Questions de Cours

- (1) Énoncer le théorème des accroissements finis.
- (2) Donner la définition de la fonction $x \rightarrow \text{Arcsin}(x)$. Quel est son domaine de définition ? Quelle est sa dérivée ?
- (3) Écrire en langage mathématique : " $f(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$."

Exercice 1: Soit f la fonction de $\mathbb{R}_*^+$ valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x \ln(x) - x + 1$.

- (1) Calculer f' et étudier les variations de f .
- (2) Calculer

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

- (3) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions l'une dans $]0, \frac{1}{\sqrt{e}}[$, l'autre dans $]\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty[$.

Exercice 2:

- (1) Simplifier l'expression

$$\text{Arcsin}(\sin(2x))$$

pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

- (2) Dessiner le graphe de $f(x) = \text{Arcsin}(\sin(2x))$ sur $[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.
- (3) Calculer $f(2\pi)$, $f(\frac{7\pi}{4})$, $f(\frac{5\pi}{2})$.

Exercice 3: Soit $n \geq 1$, on définit la fonction g_n de $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = x^n + 2x^2 - x - 1$.

- (1) Montrer que $g_n(x) < 0$ si $x \in [0, \frac{1}{4}]$.
- (2) Montrer que g_n est strictement croissante sur $[\frac{1}{4}, 1]$.

- (3) En déduire que, pour tout $n \geq 1$, il existe un unique x_n appartenant à $] \frac{1}{4}, 1[$ tel que $g_n(x_n) = 0$.
- (4) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $g_n(x_{n+1}) > 0$.
[[Utiliser le fait que $g_{n+1}(x_{n+1}) = 0$.]]
- (5) En déduire que la suite (x_n) est croissante.
- (6) Montrer que la suite (x_n) converge. On appelle a sa limite.
- (7) Montrer que a appartient à l'intervalle $[\frac{1}{4}, 1]$.
- (8) On veut montrer que $a = 1$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\frac{1}{4} \leq a < 1$.
 - (a) Montrer que la suite (a^n) converge vers 0. En déduire que la suite (x_n^n) converge vers 0.
 - (b) Déduire de la question précédente que $2a^2 - a - 1 = 0$ (*).
[[Passer à la limite dans l'expression $g_n(x_n) = 0$.]]
 - (c) Montrer que l'équation (*) amène à une contradiction et conclure que $a = 1$.

M1 . Deuxième semestre
Examen du 22 juin 2005

Le sujet est constitué de trois exercices indépendants ; chaque exercice est noté sur 6, la rédaction et la présentation étant notées sur 2.

Premier exercice

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit l'intervalle I_n par

$$I_n = \left[\frac{(n+2)^2}{n^2 + 7}, 1 + \frac{4}{n} \right].$$

1) Montrer que

$$1 + \frac{4}{n+1} < \frac{(n+2)^2}{n^2 + 7}$$

pour tout $n \geq 32$.

2) En déduire que, si $n, m \geq 32$ et si $n \neq m$, alors I_n et I_m sont disjoints.

3) Soit C l'ensemble formé par la réunion de tous les intervalles I_n , $n \geq 1$: $C = \bigcup_{n \geq 1} I_n$.

Montrer que C est borné.

4) Calculer $\sup C$.

5) Calculer $\inf C$.

Deuxième exercice

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels, supposée connue.
On définit une deuxième suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = x_0, \\ u_1 = x_0 + \frac{x_1}{2}, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{x_{n+1}}{2^{n+1}} \end{cases} \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

1) Montrer que, si $n \geq 3$, on a

$$u_n = x_0 + \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{4} + \dots + \frac{x_n}{2^n}.$$

2) On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq x_n \leq 1.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2.$$

En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente
(on ne demande pas de calculer sa limite).

3) On suppose maintenant que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq x_n \leq 1 :$$

contrairement à la question précédente, les x_n sont a priori de signe variable.

Quelle propriété importante de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cesse d'être vraie, par rapport à la question précédente ?

Montrer que, si $q > p$, on a

$$u_q - u_p = \frac{x_{p+1}}{2^{p+1}} + \dots + \frac{x_q}{2^q}.$$

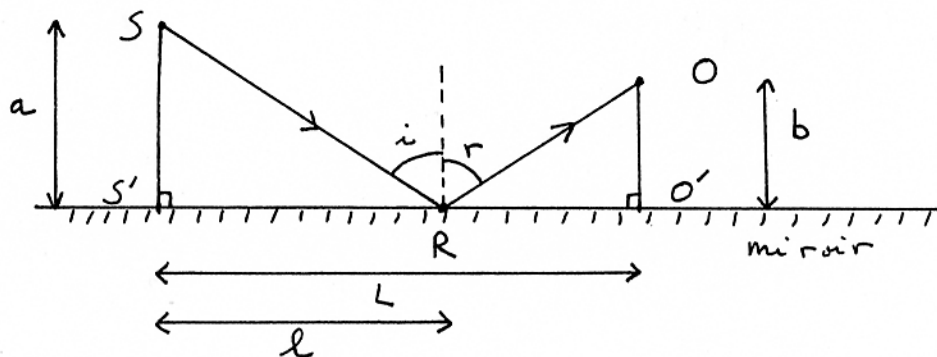
En déduire que

$$|u_q - u_p| \leq \frac{1}{2^p}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente
(on ne demande toujours pas de calculer sa limite).

Troisième exercice

Une source lumineuse ponctuelle est placée en S , et éclaire un miroir plan horizontal parfaitement réfléchissant. Un observateur est placé en O ; la lumière qu'il perçoit suit un trajet en ligne brisée comme indiqué sur le dessin :



On suppose connues les distances $a = SS'$, $b = OO'$, $L = S'O'$, et on note l la distance $S'R$, d la distance parcourue par la lumière de S à O .

1) Vérifier que

$$d = \sqrt{l^2 + a^2} + \sqrt{(L-l)^2 + b^2}.$$

2) Pour trouver l , on part du principe suivant : la lumière suit le trajet le plus court parmi tous les trajets possibles.

Si $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(L-x)^2 + b^2}.$$

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ (on commencera par remarquer que, si x est une solution, alors nécessairement $x \in [0, L]$).

c. Écrire le tableau de variations de f .

d. Montrer que $l = \frac{a}{a+b} L$.

e. Retrouver la loi de Descartes : les angles d'incidence (angle i) et de réflexion (angle r) sont égaux.

UE Éléments d'analyse M1

Examen du lundi 10 janvier 2005

Exercice

Soient f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$.

1. On suppose que $g(b) \neq g(a)$.

(i) Trouver λ réel tel que la fonction φ , définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x),$$

vérifie l'égalité $\varphi(a) = \varphi(b)$.

(ii) Prouver qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

2. On suppose que $g(a) = f(a) = 0$, et que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. On suppose aussi qu'il existe un réel l tel que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

3. Calculer

2/4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$$

Problème

On note F l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{R}$ définies et continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$(1) \quad \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} & f(x+y) f(x-y) = f(x)^2 f(y)^2, \\ f(0) \geq 0. \end{cases}$$

1. Montrer que $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F .

Partie A

Soit $f \in F$.

A 1. Enviser (1) dans les cas $x=0$, $y=0$ et $x=y$.

A 2. On note $\tilde{0}$ la fonction nulle, c'est-à-dire la fonction qui associe 0 à tout réel x .

Montrer que $f(0) = 0$ si et seulement si $f = \tilde{0}$.

A 3. On suppose qu'il existe un réel a , non nul, tel que $f(a) = 0$.

(i) On pose $u_n = a 2^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier la convergence de la suite (u_n) et donner sa limite.

(ix) En utilisant la question A1, montrer par récurrence que $f(u_n) = 0$ pour tout n .

En déduire que $f(0) = 0$.

A4. On suppose $f \neq \tilde{0}$. Calculer $f(0)$, et montrer que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Prouver que f est paire.

Partie B

Soit $f \in F$, $f \neq \tilde{0}$. On pose, si $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \ln f(x).$$

B1. Montrer que :

$$(2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad g(x+y) + g(x-y) = 2[g(x) + g(y)].$$

B2. Calculer $g(0)$, et montrer que g est paire.

B3. A partir de la propriété (2), prouver que :

$$(3) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(nx) = n^2 g(x).$$

Montrer que (3) reste vraie pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.

B4. Soit r un rationnel. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(rx) = r^2 g(x).$$

(On posera $r = \frac{p}{q}$, et on exploitera (3)).

On pose $g(1) = \lambda$, de sorte que $g(r) = \lambda r^2$ pour tout rationnel r .

B5. Soit x un réel quelconque. Montrer que : $g(x) = \lambda x^2$,
et calculer $f(x)$.

Partie C

On considère l'ensemble des fonctions f_λ , où λ est un paramètre réel, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x^2}.$$

On note (C_λ) le graphe de f_λ .

C1. Etudier les variations de f_λ , en fonction du paramètre λ .

C2. Montrer que, si $\lambda > 0$, il existe sur (C_λ) deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine.

Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de λ .

C3. Montrer que, si $\lambda < 0$, il existe sur (C_λ) deux points d'inflexion I_λ et J_λ (on rappelle que (x, y) , point du graphe de f , est un point d'inflexion lorsque $f''(x) = 0$).

Ecrire les équations des tangentes en I_λ et J_λ , et exprimer, en fonction de λ , les coordonnées de leur point d'intersection K_λ .

C4. Sur deux repères orthogonaux distincts, esquisser la forme des courbes (C_λ) dans chacun des cas $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$, en portant avec soin les points remarquables et les tangentes aux points.