FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE SAINT JÉRÔME

SUJETS D'EXAMEN LMD

Cycle **LICENCE**

Série **M102 – Géométrie et polynômes**

Années **2006-**

Attention : un sujet peut comporter plusieurs pages

EXAMEN DE M102
SESSION JANVIER 2007
DURÉE 3 HEURES

Toute réponse doit être justifiée ; la clarté du raisonnement sera prise en compte dans la notation.

Documents et calculatrices interdits.

Questions de Cours

(1) Enoncer le théorème de D'Alembert.
(2) Donner la définition du produit vectoriel et son expression en coordonnées.
(3) Soient a et b deux nombres entiers, montrer comment on obtient le PGCD de a et b par l'algorithme d'Euclide. On pourra donner un exemple.

Exercice 1: Trouver le PGCD de 279 et 87. Ecrire une relation de Bezout entre ces deux nombres.

Exercice 2: Soient P et Q les deux polynômes : $P(X) = X^4 - 1$ et $Q(X) = X^3 - 1$.

(1) Que peut-on dire des racines de P et de Q ? Donner une interprétation géométrique.
(2) Trouver le PGCD de P et Q.
(3) Ecrire une relation de Bezout reliant P et Q.
(4) Donner la décomposition en polynômes irréductibles de P et Q vu comme polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$.
(5) Même question que la précédente en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

Exercice 3: Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z.$$

Soit $g : P \to P$ qui tout point M d'affixe $z \neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z' = \frac{1-z}{1+z}$.

(1) Soit z un nombre complexe de module 1, Calculer $z' + \bar{z'}$.
(2) Soit z l'affixe d'un point M du cercle de centre 0 de rayon 1 différent du point de coordonnes $(-1, 0)$. Montrer que $g(z)$ appartient à l'axe imaginaire.

2/2

Exercice 4:

Dans l'espace $\mathcal{E}$ de dimension 3, on considère les droites D_1 et D_2 données par les équations cartésiennes :

$$D_1 \begin{cases} -2x + y + z = 5 \\ -x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -3x + z = 0 \end{cases}$$

(1) Trouver des équations paramétriques pour D_1 et D_2. Vérifier que

$$\text{le vecteur } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } D_1$$

$$\text{et que } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } D_2.$$

(2) Calculer le produit vectoriel $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.

(3) Soient P_1 le plan contenant D_1 et de vecteur directeur $\vec{n}$ et P_2 le plan contenant D_2 et de vecteur directeur $\vec{n}$. Trouver des équations paramétriques pour P_1 et P_2.

(4) Donner des équations cartésiennes pour P_1 et P_2.

(5) Montrer que $\Delta = P_1 \cap P_2$ est la perpendiculaire commune à D_1 et D_2.

(6) Donner des équations paramétriques de Δ. Quel est le vecteur directeur de Δ ?

Faculté des Sciences et Techniques d'Aix-Marseille III

Partiel M102 : Polynômes et Géométrie

Session de septembre 2006 Durée : 3 heures.

Le sujet comporte trois parties indépendantes. Il sera tenu compte de la rédaction.

Partie I - Exercices sur les polynômes

1. Donner le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de F par G dans $\mathbb{R}[X]$ dans les deux cas suivants :

a) $F = x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7,\ G = x^2 + 2x + 3$

b) $F = x^7 - 1,\ G = x^6 + 1$.

2. On pose $P = x^6 - 2x^3 + 1$ et $Q = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$. Déterminer leur PGCD et leur PPCM.

3. Donner une condition sur les paramètres m et p pour que F soit divisible par G dans les deux cas suivants :

a) $F = x^3 - 3x^2 + mx + 1,\ G = x^2 + m$.

b) $F = x^4 + p,\ G = x^2 + mx + 1$.

4. On considère la fraction rationnelle
$$f = \frac{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}.$$
Donner sa décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Petit problème de géométrie

Dans toute cette partie le plan est muni d'un repère orthonormé. On donne deux points A et B de coordonnées $A = (\alpha, \beta)$ et $B = (\alpha + 3, \beta + 4)$.

1. Donner l'équation de la droite $\mathcal{D}$ passant par A et B.

2. Donner l'équation de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par l'origine.

3. Donner le rayon R et l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre A passant par B.

4. Donner l'équation du cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon $2R$.

5. Montrer que la droite $\mathcal{D}'$ coupe le cercle $\mathcal{C}'$ si et seulement si $|4\alpha - 3\beta| \leq M$, où M est une constante dont on déterminera la valeur.

6. Montrer que si $|4\alpha - 3\beta| = M$, la droite $\mathcal{D}'$ est tangente au cercle $\mathcal{C}'$. Déterminer les coordonnées du point de tangence dans le cas où $4\alpha - 3\beta = M$.

Partie III - Construction de l'ennéagone régulier

On veut montrer que la construction du polygone régulier à 9 côtés (ennéagone) n'est pas réalisable à la règle et au compas.

1. On inscrit un polygone régulier à n côtés dans le cercle de centre O (l'origine) de rayon 1. On suppose que $A = (1, 0)$ est un sommet du polygone. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) Le polygone à n côtés est constructible à la règle et au compas,

(b) le point de coordonnées $(\cos(2\pi/n), \sin(2\pi/n))$ est constructible,

(c) le nombre $2(\cos(2\pi/n)$ est constructible.

2. Montrer la formule

$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3(\alpha) - 3\cos(\alpha).$$

3. On pose $\xi = 2\cos(2\pi/9)$. Montrer que ξ est racine de l'équation

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

4. On pose $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

(a) Tracer la courbe d'équation $y = f(x)$.

(b) Calculer $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$.

5. Monter que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers. En déduire qu'elle n'a pas de solution rationnelle.

6. Conclure que l'ennéagone régulier n'est pas constructible à la règle et au compas.

Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme/Centre de Montperrin

Partiel M102 : Polynômes et Géométrie

Lundi 9 janvier 2006 Durée : 3 heures.

Le sujet comporte trois parties indépendantes. Il sera tenu compte du soin de la rédaction.

Partie I - Exercices sur les polynômes

1. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $P_n = x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ et $Q = x^2 + 1$. Effectuer la division de P_n par Q pour $n = 2, n = 3, n = 4$, puis dans le cas général (discuter suivant les valeurs de n).

2. On pose $P = x + 1$ et $Q = x^2 + 1$. Effectuer la division suivant les puissances croissantes de P par Q à l'ordre 2, à l'ordre 3, à l'ordre 4, puis à l'ordre n.

3. On pose $P = x^6 - 2x^3 + 1$ et $Q = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1$.

a) Factoriser P (on pourra poser $y = x^3$) et Q (on pourra poser $z = x^2$).

b) Déterminer le Pgcd et le Ppcm de P et Q.

4. On considère la fraction rationnelle :

$$f = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}.$$

a) Donner la décomposition en éléments simples de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'intégrale :

$$\int_3^4 \frac{t^3}{t^2 - 3t + 2} dt.$$

Partie II - Géométrie

Dans toute cette partie le plan est muni d'un repère orthonormé.

1. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on considère D_m la droite d'équation $m^2 y + x - 2m = 0$.

a) Tracer $D_0, D_1, D_2, D_{\frac{1}{2}}$.

b) Donner un vecteur directeur de D_m.

c) Que peut-on dire des droites D_m et D_{-m} ?

2. Soit A_m le point d'intersection de D_m et $D_{\frac{1}{m}}$.

a) Calculer les coordonnées de A_3.

b) Calculer les coordonnées de A_m.

c) Montrer que les points de l'ensemble $\{A_m, m \in \mathbb{R}\}$ sont alignés.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, et B_λ le point de coordonnées $(\lambda, \frac{1}{\lambda})$.

a) Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $B_1 \in D_m$.

b) Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}$ tel que $B_\lambda \in D_m$.

4. On considère les parties du plan suivantes :

$$\mathcal{H} = \{P \text{ de coordonnées } (x, y) : xy = 1\},$$
$$\Delta = \{P \text{ de coordonnées } (x, y) : xy \leq 1\}.$$

a) Dessiner $\mathcal{H}$ et Δ.

b) Soit C le point de coordonnées $(2, -3)$. Déterminer toutes les droites D_m passant par C.

c) Soit P un point du plan. Monter que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $P \in \Delta$,

(ii) il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $P \in D_m$.

Partie III - Construction du pentagone régulier

On veut montrer que le pentagone régulier est constructible à la règle et au compas. On l'inscrit dans le cercle unité de centre O (l'origine) passant par $A = (1, 0)$ on suppose que A est un sommet du polygone.

1. Faire un dessin. Indiquer les affixes et les coordonnées des sommets du pentagone.

2. Un peu de trigonométrie.

a) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. A partir du calcul de $e^{ia}e^{ib}$, exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$.

b) En déduire que :

- $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$,
- $\cos(3a) = 4\cos^3(a) - 3\cos(a)$.

3. On pose $\alpha = 2\pi/5$.

a) Montrer que $\cos(2\alpha) = \cos(3\alpha)$.

b) On pose $\xi = \cos(\alpha)$. Montrer que ξ est racine du polynôme

$$P = 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

c) Trouver une racine évidente de P, et en déduire que 2ξ est racine du polynôme

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

4. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega = (-\frac{1}{2}, 0)$ passant par $B = (0, 1)$.

a) Montrer que 2ξ est l'abscisse d'un point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ avec l'axe des x.

b) En déduire une construction du pentagone régulier à la règle et au compas.