



FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE SAINT JÉRÔME

SUJETS D'EXAMEN LMD

<i>Cycle</i>	LICENCE
<i>Série</i>	M103 – Méthodologie mathématique
<i>Années</i>	2006-

Attention : un sujet peut comporter plusieurs pages

© 2006 - Université Paul Cézanne Aix-Marseille 3 - FST - BU

Toute reproduction, totale ou partielle, de ce document, est interdite sans le consentement express de son auteur

M103

Janvier 2007

Ni document, ni calculatrice

Durée: 1h30

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction qui devra être concise mais précise et de la présentation. Le barème est précisé entre parenthèses.

Exercice 1: (sur 6 points)

Soit f l'application: $[0; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos 3x$.
déterminer : $f(\{0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi\})$; $f^{-1}(\{0\})$; $f^{-1}(\{0; -1\})$
 f est-elle injective? f est-elle surjective?

Exercice 2: (sur 3 points)

Soit g l'application: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto r : r$ étant le reste dans la division euclidienne de n par 3.
a) g est-elle injective?
b) g est-elle surjective?
b) m étant un entier, quels sont les antécédents éventuels de m par g ? Discuter selon la valeur de m .

Exercice 3: (sur 4 points)

Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses:

- $(\forall x \in \mathbb{R}), (x > 3) \Rightarrow (x^3 > 27)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), (x < -6) \Rightarrow (x \leq -6)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), (x \leq -6) \Rightarrow (x < -6)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), (x < -6) \text{ et } (y < 4) \Rightarrow (xy < -24)$
- $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}), (x < -6) \text{ et } (y < -4) \Rightarrow (xy > 24)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}), (x = y + 1)$
- $(\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}), (x = y + 1)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}), (\exists y \in \mathbb{R}), (x = y^2 + 1)$

Exercice 4: (sur 4 points)

Soit E un ensemble de cardinal n : montrer, par une méthode au choix, que le nombre de sous ensembles de E est: 2^n .

Exercice 5: (sur 3 points)

Montrer par récurrence que: $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Ni document, ni calculatrice

La note tiendra compte de la qualité de la rédaction qui devra être concise mais précise et de la présentation. Le barème est précisé entre parenthèses.

Exercice 1: (sur 2 points)

Montrer que : a et b étant des réels quelconques :

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

Exercice 2 : (sur 2 points)

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses: (justifier toute réponse)

" $(\exists x \in \mathbb{R}), (\ln x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R}), (x^2 - 1 \geq 0)$ "

" $(\exists x \in \mathbb{R}), [(\ln x + 1 = 0) \text{ et } (x^2 - 1 \geq 0)]$ "

Exercice 3: (sur 5 points)

Soit f l'application: $[-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin 2x$.

a) Déterminer : $f\left(\left\{0; \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \pi\right\}\right); f^{-1}\{0\}; f^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right\}\right)$

b) f est-elle injective? surjective?

Exercice 4 : (sur 3 points)

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 3; u_{n+1} = \sqrt{2u_n - 1}$, pour tout entier naturel n ;

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n > 1$$

Soit (v_n) la suite définie par : $v_0 = \frac{3}{4}; v_{n+1} = \sqrt{2v_n - 1}$, pour tout entier naturel n ;

Montrer que pour tout entier naturel n :

$$v_n \leq 1$$

Exercice 5 : (sur 6 points)

1) Soit f la fonction: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+2}\right)$: (ln: logarithme népérien)

a) Quel est l'ensemble de définition de f ? f est-elle une application?

b) f est-elle injective?

2) Soit g la fonction: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right|$:

a) Quel est l'ensemble de définition de g ? g est-elle une application?

b) Résoudre l'équation $g(x) = \ln 2$; g est-elle injective?

Exercice 6 (sur 2 points)

Les implications suivantes sont-elles vraies? (justifier toute réponse):

$$-(\forall x \in \mathbb{R}^+), (\forall y \in \mathbb{R}^+), (x < y) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} > \frac{1}{y}\right)$$

$$-(\forall x \in \mathbb{R}^*), (\forall y \in \mathbb{R}^*), (x < y) \Rightarrow \left(\frac{1}{x} < \frac{1}{y}\right)$$

$$-(\forall x \in \mathbb{R}^+), (\forall y \in \mathbb{R}^+), (x < y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2)$$

$$-(\forall x \in \mathbb{R}^*), (\forall y \in \mathbb{R}^*), (x \leq y) \Rightarrow (x^2 > y^2)$$

M103

Université Paul Cézanne Aix Marseille III
UE méthodologie

Examen
Durée: 1h30

Documents et calculatrice interdits

Il sera tenu compte dans la note de la qualité de la présentation, de la rédaction, courte et précise, et de l'orthographe.

Toute réponse donnée sans preuve sera comptée nulle.

Exercice 1 (sur points)

Montrer que $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ est non rationnel.

Exercice 2 : (sur points)

- 1) Soit f la fonction: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left(\frac{x-3}{x+1}\right)$: (ln: logarithme népérien)
a) Quel est l'ensemble de définition de f ? f est-elle une application?
- 2) Soit g la fonction: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x^2 + 4)$: (ln: logarithme népérien)
a) Quel est l'ensemble de définition de g ? g est-elle une application?
b) Déterminer les ensembles: $g(\{-1;0;1;\sqrt{2}\})$; $g^{-1}(\{0;\ln 6\})$; g est-elle injective? g est-elle surjective?
- 3) Soit h la fonction: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sin 2x$: h est-elle bijective? Déterminer $h^{-1}(\{0\})$.

Exercice 3 (sur points)

Les implications suivantes sont-elles vraies? (justifier toute réponse):

- $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+), (\forall y \in \mathbb{R}_*^+), (x < y) \Rightarrow (x^3 < y^3)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+), (\forall y \in \mathbb{R}_*^+), (x < y) \Rightarrow (x^2 < y^2)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+), (\forall y \in \mathbb{R}_*^+), (x < y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_*^-), (\forall y \in \mathbb{R}_*^-), (x < y) \Rightarrow (x^2 > y^2)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^*), (\forall y \in \mathbb{R}^*), (x < y) \Rightarrow (\frac{1}{x} < \frac{1}{y})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}_*^+), (\forall y \in \mathbb{R}_*^+), (x < y) \Rightarrow (\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y})$

Exercice 4 : a, b, c étant des réels non nuls quelconques: donner la négation des propositions suivantes:

P: " $a < b$ et $bc < 1$ "; Q: " $0 < \frac{a}{b} < 1$ et $0 < c < \frac{1}{b}$ "; R: " $a > 0$ et $b > 0$ et $c > 0$ "
A-t-on: $P \Rightarrow R$? $R \Rightarrow P$? $P \Rightarrow Q$? $Q \Rightarrow P$?