



FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE SAINT JÉRÔME

SUJETS D'EXAMEN LMD

<i>Cycle</i>	LICENCE
<i>Série</i>	M4 – Analyse 1
<i>Années</i>	2005-

Attention : un sujet peut comporter plusieurs pages

© 2005 - Université Paul Cézanne Aix-Marseille 3 - FST - BU

Toute reproduction, totale ou partielle, de ce document, est interdite sans le consentement express de son auteur

M4 - Examen du 20 juin 2007 - Durée 3 heures

Aucun document - Aucune calculatrice

I

On note f la fonction définie sur $] -1, +\infty[\setminus \{0\}$ par

$$f(x) = [1 + x]^{\frac{1}{x}}.$$

1 - Montrer que f possède une limite finie l quand x tend vers 0.On note g la fonction définie sur $] -1, +\infty[$ par $g(0) = l$ et $g(x) = f(x)$ pour $x \neq 0$.2 - Montrer que g est dérivable au point 0.3 - Etudier la position du graphe de g par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

II

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x(x^2 + x + 1)y' - (x^2 - 1)y = \frac{3(x + 1)}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}.$$

1 - Déterminer les fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de l'équation homogène associée à (E) .2 - Vérifier que la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour chaque réel x par $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$.3 - Déterminer toutes les fonctions de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui sont solution de (E) .

4 - Démontrer que

$$\sqrt{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3}\varepsilon(x)$$

où la fonction ε tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.5 - Démontrer qu'il existe une solution y_1 de (E) sur $]0, +\infty[$, et une seule, telle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_1(x) = 0$.6 - Calculer, pour chaque réel X , la valeur $h(X) = \int_1^X \sqrt{x^2 + 2x + 3} dx$.7 - Soit X un réel > 1 . On considère la fonction $f : [1, X] \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque réel $x \in [1, X]$ associe $f(x) = \frac{1}{3} \left[2\sqrt{2x + 3} \right]^{\frac{3}{2}}$ et on note Γ son graphe. Démontrer que Γ est rectifiable et calculer sa longueur.

30 MAI 2007

UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

M4 – Examen écrit du 15 mai 2007 – Durée 3 heures

Aucun document – Aucune calculatrice

I

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + ay = 0$$

où a est un réel non nul.

- 1 – Déterminer, lorsque $a = \alpha^2$, une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) .
- 2 – Déterminer, lorsque $a = -\alpha^2$, une base de l'espace vectoriel des solutions de (E) .
- 3 – Déterminer toutes les valeurs de a pour lesquelles il existe une solution non nulle f de (E) qui vérifie les deux conditions $f(0) = f(1) = 0$.

II

- 1 – Calculer les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = \operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$ et $v(t) = \operatorname{Argsh} t = \operatorname{Log}(t + \sqrt{t^2 + 1})$.

On note f la fonction réelle définie pour chaque réel $t \neq 0$ par

$$f(t) = \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{t}.$$

- 2 – Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0.
- 3 – Montrer que f tend vers une limite l que l'on déterminera quand x tend vers 0.
- 4 – On considère deux réels $0 < a < b$.
 - a) Justifier l'existence de $I = \int_a^b \frac{dt}{\operatorname{sh} t}$.
 - b) Calculer I en fonction de a et de b .
- 5 – Soit x un réel > 0 .
 - a) Justifier l'existence de $F(x) = \int_x^1 \left[\frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{t} \right] dt$.
 - b) Calculer $F(x)$ puis montrer que $F(x)$ tend vers une limite finie L , que l'on calculera, quand x tend vers 0.
- 6 – On note g la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si } t \neq 0, \\ l & \text{si } t = 0. \end{cases}$$
 - a) Montrer que $L = \int_0^1 g(t) dt$.
 - b) Montrer que g est dérivable au point 0 et calculer $g'(0)$.
 - c) Etudier la position du graphe de g par rapport à sa tangente au voisinage de 0.

M4 – Examen écrit du 5 septembre 2006 – Durée 3 heures

Aucun document – Aucune calculatrice

Dans tout le problème λ désigne un paramètre réel.

I

1 - Justifier l'existence, pour chaque réel t , de

$$a(t) = \int_0^t e^{\lambda u} \cos 2u \, du,$$
$$b(t) = \int_0^t e^{\lambda u} \sin 2u \, du.$$

2 - a) Montrer que $a(t)$ et $b(t)$ vérifient le système linéaire

$$a(t) + \frac{\lambda}{2} b(t) = \frac{e^{\lambda t}}{2} \sin 2t$$
$$\frac{\lambda}{2} a(t) - b(t) = \frac{e^{\lambda t}}{2} \cos 2t - \frac{1}{2}$$

b) Calculer $a(t)$ et $b(t)$.

II

1 - Déterminer toutes les solutions de l'équation $y'' + y = \sin t$.2 - Déterminer toutes les solutions de l'équation $y'' - y = \sin t$.

III

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad y'' + 2\lambda y' + (\lambda^2 + 1)y = \sin t.$$

1 - Déterminer, en fonction du paramètre λ , l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 2\lambda y' + (\lambda^2 + 1)y = 0$.2 - Déterminer toutes les solutions de (E) .3 - Déterminer, en fonction du paramètre λ , la solution f_λ de (E) qui vérifie

$$f_\lambda(0) = f'_\lambda(0) = 0.$$

4 - Montrer que, pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $f_0(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} f_\lambda(t)$.

M4 – Examen écrit du 14 juin 2006 – Durée 3 heures

Aucun document – Aucune calculatrice

I

1 – Justifier l'existence de primitives, sur l'intervalle $]0, \infty[$, de la fonction

$$u(t) = \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + t + 1)}$$

et les calculer.

2 – Justifier l'existence de primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$v(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 3}$$

et les calculer.

3 – a) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $\sqrt{1+u}$.b) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $+\infty$ de la fonction

$$\frac{\sqrt{t^2 + 2t + 3}}{t}.$$

II

On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad t(t^2 + t + 1)y' - (t^2 - 1)y = \frac{3(t+1)}{\sqrt{t^2 + 2t + 3}}.$$

1 – Préciser les intervalles sur lesquels l'équation (E) possède des solutions.

2 – Trouver toutes les solutions de

$$(E_h) \quad t(t^2 + t + 1)y' - (t^2 - 1)y = 0$$

sur $]0, +\infty[$.3 – Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \sqrt{t^2 + 2t + 3}$$

est solution de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.4 – Déterminer toutes les solutions de l'équation (E) sur $]0, +\infty[$.

5 – Pour chaque réel a , on note f_a la solution de (E) sur $]0, +\infty[$ qui vérifie $f_a(1) = a$. Le graphe de f_a possède-t-il une asymptote quand t tend vers $+\infty$? Etudier éventuellement la position du graphe par rapport à l'asymptote.

M4 Examen du 27/06/2005

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. L'énoncé comporte deux pages et se compose de trois exercices. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1

On définit les fonctions $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} & \text{si } x > 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

(a) Vérifier que les fonctions f et g sont définies et continues sur $[0, +\infty[$.

(b) Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ vérifiant $\varepsilon < A$. Montrer que

$$\int_{\varepsilon}^A f(x) dx = \frac{1 - \cos A}{A} - \frac{1 - \cos \varepsilon}{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^A g(x) dx.$$

(c) En déduire que, pour tout $A > 0$,

$$\int_0^A f(x) dx = \frac{1 - \cos A}{A} + \int_0^A g(x) dx.$$

(d) On admet que

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g(x) dx = \frac{\pi}{2}.$$

Calculer

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A f(x) dx$$

(on justifiera l'existence de cette limite).

Exercice 2

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $f(t) > 0$ pour tout $0 \leq t \leq 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$I_n = \left(\int_0^1 (f(t))^n dt \right)^{\frac{1}{n}}.$$

(a) Soit $a > 0$ un réel. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^{\frac{1}{n}}$.

(b) Justifier l'existence d'un réel $c \in [a, b]$ tel que, pour tout $t \in [a, b]$, $f(t) \leq f(c)$. Dans toute la suite, on note $M = f(c)$.

(c) Prouver que $I_n \leq M$ pour tout entier $n \geq 1$.

(d) Soit $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < M$.

- (i) Justifier qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $t \in [c - \delta, c + \delta] \cap [0, 1]$, $f(t) \geq M - \frac{\varepsilon}{2}$.
- (ii) Montrer que, pour tout entier n , $I_n \geq \left(\int_{c-\delta}^{c+\delta} (f(t))^n dt \right)^{\frac{1}{n}}$.
- (iii) En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geq N$, $I_n \geq M - \varepsilon$.
- (e) Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
- (f) Soient $a < b$ des réels et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $g(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b]$. Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_a^b (g(t))^n dt \right)^{\frac{1}{n}}.$$

On justifiera la réponse.

Exercice 3

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante:

$$(1) \quad y'' - \frac{1}{t}y' + 4t^2y = 0$$

pour tout $t \in]0, +\infty[$.

- (a) On pose $\varphi_1(t) = \sin(t^2)$ et $\varphi_2(t) = \cos(t^2)$ pour tout $t > 0$. Vérifier que φ_1 et φ_2 sont solutions de (1).
- (b) Montrer que $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ est une base de l'espace vectoriel des solutions de (1).
- (c) Quelles sont toutes les solutions de (1) ?
- (d) Soit $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 . Pour tout $t > 0$, on pose $\psi(t) = \varphi(\sqrt{t})$. Montrer que φ est solution de (1) si, et seulement si, ψ est solution d'une équation différentielle qu'on déterminera. Retrouver alors le résultat de la question (c).

M4 Examen du 20/05/2005

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits. L'énoncé comporte deux pages et se compose d'un problème et d'un exercice. Les réponses doivent être justifiées.

Problème

Partie 1

On définit la fonction $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Justifier que f est bien définie sur $[0, \pi]$.
- (b) Vérifier que f est dérivable sur $]0, \pi]$ et calculer sa dérivée sur cet intervalle.
- (c) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$ (on utilisera la définition de la dérivée).
- (d) Montrer enfin que f est de classe C^1 sur $[0, \pi]$ (on rappelle qu'une fonction est de classe C^1 sur un intervalle I si, et seulement si, elle est dérivable sur I et sa dérivée est continue sur I).

Partie 2

Pour tout entier $n \geq 0$, on définit la fonction $g_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} & \text{si } 0 < x \leq \pi, \\ 2n+1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Montrer que la fonction g_n est définie et continue sur $[0, \pi]$.
- (b) Pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in [0, \pi]$, montrer que

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = 2 \cos((n+1)x).$$

- (c) Pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$I_n = \int_0^\pi g_n(t) dt.$$

- (i) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 0}$ est constante.
- (ii) Calculer I_n pour tout entier $n \geq 0$.

Partie 3

On considère à nouveau la fonction f définie dans la partie 1. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit

$$J_n = \int_0^\pi f(x) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) dx.$$

On définit aussi la fonction $h : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

et, pour tout entier $n \geq 0$, on pose

$$K_n = \int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi} h(t) dt.$$

- (a) Vérifier que h est continue sur $[0, +\infty[$.
- (b) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ (on utilisera une intégration par parties).
- (c) En déduire que la suite $(K_n)_{n \geq 0}$ est convergente et calculer sa limite (on cherchera une relation entre I_n , J_n et K_n , où I_n est défini dans la partie 2).

Exercice

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante:

$$(1) \quad 4t\sqrt{t}y'' - 2ty' + y = 0.$$

pour $t \in]0, +\infty[$. Pour tout $t > 0$, on pose $\varphi_0(t) = e^{\sqrt{t}}$.

- (a) Vérifier que φ_0 est solution de (1).
 - (b) A toute fonction φ dérivable sur $]0, +\infty[$, on associe la fonction ψ définie par $\varphi = \varphi_0\psi$. Montrer que φ est solution de (1) si, et seulement si, ψ est solution de l'équation suivante:
- $$(2) \quad 2\sqrt{t}z'' + z' = 0.$$
- (c) En déduire toutes les solutions de (1).
 - (d) On cherche maintenant à résoudre l'équation suivante:
- $$(3) \quad 4t\sqrt{t}y'' - 2ty' + y = -t$$

sur $]0, +\infty[$.

- (i) Trouver une solution φ_1 de (3). On pourra la chercher sous la forme $\varphi_1(t) = \lambda t^N$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$.
- (ii) Quelles sont toutes les solutions de (3) ?