UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE
BIBLIOTHÈQUE UNIVERSITAIRE

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE SAINT JÉRÔME

SUJETS D'EXAMEN LMD

Cycle **LICENCE**

Série **M5 – Algèbre linéaire 1**

Années **2005-**

Attention : un sujet peut comporter plusieurs pages

1/2

30 JUIN 2007

Université Aix-Marseille III-Paul Cézanne.
L1-S2: M-5 Algèbre Linéaire Année 2007

M5: Examen de rattrapage du 27 juin 2007

Remarques:

1. Aucun document autorisé
2. Calculatrices et téléphones portables interdits

1 Questions diverses

Dans toutes ces questions, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer sans démonstration, si elle est vraie ou fausse:

(i) Toute famille libre dans E a au plus n éléments.

(ii) Toute famille de E composée de plus de n éléments est génératrice.

(iii) Il existe une base de E avec $e_1 = 0_E$.

(iv) Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice dans E, et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors la famille $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est génératrice dans E.

(v) Si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une famille libre dans E, et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors la famille $(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n))$ est libre dans E.

2. Soient A, $B \in M_n(\mathbb{K})$ pour tout entier naturel $n \geq 2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On suppose que A est inversible. Montrer que

$$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA).$$

3. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $p \circ p = p$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\, p \oplus \mathrm{Im}\, p$. On pourra remarquer que, pour tout $x \in E$, on a $x = x - p(x) + p(x)$.

2 Endomorphisme

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^4$. Soit alors f un endomorphisme de E défini par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Comment se décompose $f(e_i)$ sur la base canonique pour $i = 1, 2, 3, 4$?

2. Déterminer $\mathrm{Ker} f$ et en donner une base $\mathcal{B}_0 = (w_1, w_2, \cdots)$. Dimension de $\mathrm{Ker} f$?

3. Dimension de $\mathrm{Im} f$? Déterminer $\mathrm{Im} f$ et donner une base, que l'on notera $\mathcal{B}_1 = (v_1, v_2, \cdots)$, de $\mathrm{Im} f$.

4. Montrer que $\mathrm{Im} f^2 \subseteq \mathrm{Im} f$.

5. On définit l'ensemble des vecteurs $\mathcal{H} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_0$. Est-ce une base de $\mathbb{R}^4$? Si c'est une base de $\mathbb{R}^4$ donner alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{H}} f,$$

sinon passer à la question suivante.

6. La relation $\mathbb{R}^4 = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ est-elle vraie?

3 Système linéaire

1. Déterminer, selon les valeurs de m, le rang de la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ m & m & -2 \\ 1 & -m & 2 \end{pmatrix}, \qquad m \in \mathbb{R}.$$

2. Résoudre, selon les valeurs de m, le système:

$$\begin{array}{rcl} x - y + 2z & = & a + 2 \\ mx + my - 2z & = & a \\ x - my + 2z & = & 1 \end{array}, \qquad m,\ a\ \in \mathbb{R}.$$

4 Hyperplan

Soit $n \geq 2$ un entier naturel et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels. On suppose qu'il existe au moins un $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$ et on définit

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0\}.$$

1. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et que $H \neq \mathbb{R}^n$.

2. Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$L(x) = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n.$$

Montrer que L est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

3. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Calculer $L(e_i)$ pour $i = 1, \ldots, n$. Déterminer le noyau et l'image et de L.

4. En utilisant la question précédente déterminer la dimension de H.

5. Soit $a \in \mathbb{R}^n \backslash H$. Est-ce que $\mathbb{R}^n = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$?

30 MAI 2007 1/2

Université Aix-Marseille III-Paul Cézanne. Année 2007
L1-S2: M-5 Algèbre Linéaire

M5: Examen du 16 mai 2007

Remarques:

1. Aucun document autorisé
2. Calculatrices et téléphones portables interdits

1 Questions diverses

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathbf{e} = (e_1, \cdots, e_n)$, et f une application linéaire de E dans F:

(i) Si l'image par f de la base $\mathbf{e}$ est une famille *libre* dans F peut-on dire que f est injective? est surjective?

(ii) Si l'image par f de la base $\mathbf{e}$ est une famille *génératrice* dans F peut-on dire que f est injective? est surjective?

On demande une réponse par oui ou par non, sans aucune démonstration.

2. Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Discuter son rang selon les valeurs du réel a.

3. Soit une matrice $A \in M_{3,4}(\mathbb{K})$. Quelle est la valeur maximale possible pour son rang?

4. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Montrer que si f est injective alors, pour toute décomposition $E = F \oplus G$, on a $f(E) = f(F) \oplus f(G)$.

2 Similitude

Soit $n = 2, 3, \ldots$ et A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B si, et seulement si, il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $B = PAP^{-1}$.

a) Vérifier que la similitude définit une relation d'équivalence, c'est-à-dire qu'elle vérifie les propriétés suivantes:

(i) réflexivité: A est semblable à A,

(ii) symétrie: si A est semblable à B, alors B est semblable à A,

(iii) transitivité: si A est semblable à B et si B est semblable à C, alors A est semblable à C.

b) Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Justifier que A et B sont semblables si, et seulement si, il existe un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ et des bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ de $\mathbb{K}^n$ telles que

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}} u \quad \text{et} \quad B = \mathrm{Mat}_{\mathbf{f}} u.$$

c) Quelles sont les matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ qui sont semblables à I_n? Deux matrices inversibles sont-elles toujours semblables? Si oui justifier, sinon donner un contre-exemple.

d) On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$, et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est A, soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathbf{e}} u$.

(i) Calculer $u(e_1)$ et $u(e_2)$.

(ii) On définit $e_3 = (1, -1)$. Vérifier que $\mathbf{f} = (e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donner la matrice de u dans cette base. En déduire que A et B sont semblables.

(iii) Montrer que AB et BA ne sont pas semblables (on calculera AB et BA).

3 Endomorphisme

Soit f une application de $E = \mathbb{R}_3[X]$ dans E définie par

$$f(P(X)) = P(X+1) - P(X).$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Montrer que la matrice de f dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer qu'il existe un entier n (que l'on déterminera) tel que $f^n = 0$.
4. Donner une base de $\mathrm{Ker} f$.
5. Donner une base de $\mathrm{Im} f$.
6. La relation $E = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$ est-elle vraie?

4 Système linéaire

1. Déterminer, selon les valeurs du réel m, le rang de la matrice:

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

2. Résoudre, selon les valeurs de m, a, b, c, le système:

$$\begin{cases} mx + y + z = a \\ x + my + z = b \\ x + y + mz = c \end{cases}, \qquad m, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

EXAMEN DE M5
DEUXIÈME SESSION
SEPTEMBRE 2006

Toute réponse doit être justifiée ; la clarté du raisonnement sera prise en compte dans la notation.

Documents et calculatrices interdits.

Questions de Cours

(1) Donner la définition de l'image et du noyau d'une application linéaire.
(2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application linéaire soit injective.
(3) Enoncer le théorème du rang.

Exercice 1: On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = -8u_{n+1} - 7u_n.$$

(1) Poser $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Soit la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} O & 1 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$ et que $X_n = A^n X_0$.

On veut obtenir u_n en fonction de n par deux méthodes.

(2) **Première méthode.**
   (a) Montrer que $A^2 + 8A + 7I = 0$.
   (b) Soit P_A le polynôme $X^2 + 8X + 7$. Effectuer la division euclidienne de X^n par P_A. En déduire que, pour tout entier n, il existe a_n et b_n vérifiant : $A^n = a_nA + b_nI$.
   (c) Calculer a_n et b_n en fonction de n.
   (d) En déduire l'expression de X_n en fonction de n et celle de u_n en fonction de n.

(3) **Deuxième méthode**
   (a) Soit P la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{pmatrix}.$$

2/2

Calculer P^{-1}

(b) Montrer que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} = D.$

(c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

(d) En déduire, pour tout entier n, l'expression de A^n et exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 2: Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $det(M)$.

(2) Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 3: Soit m un nombre réel et (e_1, e_2, e_3) une base de $\mathbb{R}^3$. On définit l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ par

$$
\begin{aligned}
f(e_1) &= \frac{1}{2}(2m+1)e_1 + \frac{3}{2}e_3 \\
f(e_2) &= -\frac{3}{2}e_1 + (m+2)e_2 + \frac{3}{2}e_3 \\
f(e_3) &= \frac{3}{2}e_1 + \frac{1}{2}(2m+1)e_3
\end{aligned}
$$

(1) Caculer la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).

(2) Montrer que, si $m \neq 1$ et $m \neq -2$ alors le rang de f est égal à 3.

(3) Si $m = -2$, montrer que le rang de f est égal à 2 et donner une base de l'image de f.

(4) Si $m = 1$, montrer que le rang de f est égal à 1 et donner une base de l'image de f.

EXAMEN DE M5
SESSION DE JUIN 2006
DURÉE 3 HEURES

Toute réponse doit être justifiée ; la clarté du raisonnement sera prise en compte dans la notation.

Documents et calculatrices interdits.

Questions de Cours

(1) Donner la définition d'une application linéaire.
(2) Donner une définition d'un sous-espace vectoriel.
(3) Donner la définition de l'inverse d'une matrice. Calculer l'inverse de la matrice
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Exercice 1: On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et par la relation de récurrence :
$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

(1) Poser $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Soit la matrice A définie par
$$A = \begin{pmatrix} O & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}.$$
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
On veut obtenir u_n en fonction de n par deux méthodes.

(2) **Première méthode.**
(a) Montrer que $A^2 - 5A + 6I = 0$.
(b) Soit P_A le polynôme $X^2 - 5X + 6$. Effectuer la division euclidienne de X^n par P_A. En déduire que, pour tout entier n, il existe a_n et b_n vérifiant : $A^n = a_nA + b_nI$.
(c) Calculer a_n et b_n en fonction de n.
(d) En déduire l'expression de X_n en fonction de n et celle de u_n en fonction de n.

(3) **Deuxième méthode**
(a) Soit P la matrice
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2/2

Calculer P^{-1}

(b) Montrer que $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

(d) En déduire, pour tout entier n, l'expression de A^n et exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 2: Soit m un nombre réel. On considère le système linéaire (S) :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 4 \\ -x + my + 2z = 5 \\ 7x + 3y + (m-5)z = 7 \end{cases}$$

et soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & m & 2 \\ 7 & 3 & m-5 \end{pmatrix}$$

la matrice associée au système (S).

(1) Calculer le déterminant de A.

(2) On suppose que $m \neq 1$ et $m \neq 6$. Montrer que le système (S) a une unique solution. La calculer.

(3) On suppose que $m = 1$. Montrer que le système (S) n'a pas de solution.

(4) Pour quelles valeurs de m la matrice A est-t-elle inversible ?

Exercice 3: Soit m un nombre réel. On munit $\mathbb{R}^3$ de la base (e_1, e_2, e_3). Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par les images des vecteurs de base par les formules :

$$\begin{cases} f(e_1) = e_1 + 2e_2 + (m+2)e_3 \\ f(e_2) = -e_1 + (m-4)e_2 - 4e_3 \\ f(e_3) = (m-2)e_1 - 2e_2 - 3e_3 \end{cases}$$

(1) Déterminer la matrice A de l'application linéaire f dans la base (e_1, e_2, e_3).

(2) Montrer que le rang de A est 3 sauf si $m \neq 1$ et $m \neq 2$.

(3) Lorsque $m = 1$ ou $m = 2$, on déterminera le rang de A ainsi qu'une base de l'image de f.

Faculté des Sciences et Techniques
de Saint-Jérôme

Année 2004/2005
M5

Session Juin 2005

Durée de l'épreuve: 3 heures

Documents et calculatrices interdits

1/ (a) Calculer le déterminant de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Calculer le rang de

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = [\delta_{ij,j-i+1}]_{i,j} \in \mathbb{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

2/ (a) Résoudre le système

$$\begin{aligned} x_2 - x_4 &= 1 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= d \end{aligned}$$

en distinguant les différents cas selon la valeur de $d \in \mathbb{R}$. Y-a-t'il une valeur de d pour laquelle le système admet une infinité de solutions ?

(b) Pour le système général

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

où $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ est une matrice normalisée de rang r, donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'il n'existe pas de solution.

3/ (a) Enoncer la règle de Cramer (avec les hypothèses nécéssaires) pour résoudre un système d'équations linéaires.

(b) Déterminer le coefficient x_1 du vecteur $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ qui satisfait :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

4/ Vrai ou faux ? (sans preuve)

(a) $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

(b) $\det(ABA^{-1}) = \det B$

(c) A inversible $\Longrightarrow$ $\det A = 1$

(d) E élémentaire $\Longrightarrow$ $\det A = 1$

(e) $\det(A + B) = \det A + \det B$

(f) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$

(g) $\det(-A) = \det A$ ou $\det(-A) = -\det A$

5/ Déterminer la matrice $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ qui définit la transformation des coordonnées $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^2$ aux coordonnées $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, où $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ sont les coordonnées par rapport à la base $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, et $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ sont les coordonnées par rapport à la base $w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

6/ Soit V un espace vectoriel sur un corps K, et soient $v_1, v_2, \ldots, v_s \in V$.

(a) Définir "$v_1, v_2, \ldots, v_s$ sont linéairement indépendents".

(b) Définir "$v_1, v_2, \ldots, v_s$ engendrent V".

(c) Comment appelle-t'on un système de vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_s$ qui satisfaient les proprietés (a) et (b) ci-dessus ?

(d) Pour $V = \mathbb{R}^2$ et $K = \mathbb{R}$ donner un exemple d'un système de vecteurs qui satisfaient (a) mais pas (b).

(e) Pour $V = \mathbb{R}^2$ et $K = \mathbb{R}$ donner un exemple d'un système de vecteurs qui satisfaient (b) mais pas (a).

7/ Soit V un espace vectoriel de dimension finie, et soit U et W deux sous-espaces. Montrer que si $\dim(U \cap W) = \dim(U + W)$, alors $U = W$.

8/ (a) Enoncer le théorème de Laplace pour développer le déterminant d'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ par la j-ième colonne.

(b) Développer $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ par la 3-ième ligne et calculer sa valeur en utilisant la règle de Sarrus.

9/ Soit V et W des espaces vectoriels, et $f : V \to W$ une application linéaire. Soit $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Décider si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Donner une preuve ou un contre-exemple :

(i) $v_1, \ldots, v_n$ linéairement indépendants $\Longrightarrow$ $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linéairement indépendants;

(ii) $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linéairement indépendants $\Longrightarrow$ $v_1, \ldots, v_n$ linéairement indépendants.

10/ (a) Soit A une matrice qui décrit une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par rapport à une base $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ selon la façon usuelle. Comment peut-on interpréter la i-ème colonne de A $\quad (1 \leq i \leq n)$?

(b) Calculer la $(3 \times 3)-$matrice qui décrit la rotation de 90^o de

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

autour de l'axe des z, par rapport à la base standard.

1/3

Faculté des Sciences et Techniques
de Saint-Jérôme

Année 2004/2005
M5

Session Mai 2005

Durée de l'épreuve: 3 heures

Documents et calculatrices interdits

1/ (a) Donner la définition de $\det A$ pour $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathbb{M}_n(K)$.

(b) Calculer le déterminant de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2/ (a) Résoudre le système

$$\begin{array}{ccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\ & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & b \\ x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \end{array}$$

en distinguant les différents cas selon la valeur de $b \in \mathbb{R}$. Y-a-t'il une valeur de b pour laquelle le système admet une solution unique ?

(b) Pour le système général

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

où $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$ est une matrice normalisée de rang r, donner la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution unique.

3/ Vrai ou faux ? (sans preuve)

(a) $\det (A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

(b) $\det (A - B) = \det A - \det B$

(c) $\det A = \det A'$ (A' obtenue de A par normalisation)

(d) $\det (A \cdot B) = \det (B \cdot A)$ (A et B matrices carrées)

(e) $\det(\lambda A) = \lambda \det A$.

(f) $\det({}^tA) = -\det A$.

(g) A inversible $\Longleftrightarrow \det A \neq 0$

4/ (a) Calculer la signature des permutations suivantes:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Dcomposer la permutation π_2 en produit de transpositions de type $\tau_{i,i+1}$.

(c) Montrer: Pour une permutation π quelconque le nombre de facteurs dans un produit comme ci-dessus est pair, si et seulement si la signature de la permutation π est égale 1. On peut utiliser que la signature est un homomorphisme de groupes.

5/ A. Parmi les systèmes suivants, préciser ceux qui sont linéairement indépendants ? Donner une preuve ou énoncer une dépendance linéaire :

(a) $$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(b) $$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(c) $$w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

B. Donner la définition pour l'indépendance linéaire. Spécifier s'il vous plait "pour tout ..." ou "il existe des ...".

6/ Soit V un espace vectoriel de dimension finie.

(a) Donner la définition
  (i) d'une base de V, et
  (ii) d'un système minimal de générateurs de V.

(b) Démontrer : si $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ (pour $n \geq 2$) est un système minimal de générateurs de V, alors $v_1, \ldots, v_n$ est une base de V.

7/ (a) Déterminer la matrice A qui définit la transformation des coordonnées $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ aux coordonnées $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, où $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ sont les coordonnées par rapport à la base standard, et $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$ sont les coordonnées par rapport à la base $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) Quelle est la règle générale pour trouver une telle matrice ?

8/ Soit V un espace vectoriel sur un corps K.

(a) Donner la définition de la dimension $\dim V$ de V.

(b) Soit $v_1, \ldots, v_n$ une base de V et soit $W \subset V$ le sous-espace vectoriel engendré par $w_1 = a_{1,1}v_1 + \ldots + a_{1,n}v_n, \ldots, w_m = a_{m,1}v_1 + \ldots + a_{m,n}v_n$. Donner une formule qui exprime la dimension de W en fonction des $a_{i,j}$ (sans preuve).

(c) Calculer la dimension des sous-espaces vectoriels $W = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ et $U = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\rangle$ de $V = \mathbb{R}^3$.

(e) Calculer $\dim(W+U)$ et en déduir $\dim(W \cap U)$. Enoncer la formule qu'on utilise.

9/ Soient V, W espaces vectoriels sur un corps K.

(a) Définir "f est injective" et $\mathrm{Ker} f$.

(b) Montrer pour tout $f : V \to W$ linéaire:

$$\mathrm{Ker} f = 0 \qquad <=> \qquad f \text{ injective}$$

10/ (a) Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & z & u \\ 1 & 1 & y & w & t \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, déterminer les inconnues telles que $v \longmapsto A \cdot v$ décrit une application linéaire f avec $\dim(\mathrm{Ker} f) = 3$.

(b) Préciser les entiers m et n tels que f soit une application $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

(c) Quelle est la dimension de $\mathrm{Im} f$?

(d) Donner la formule qui relie m avec $\mathrm{Ker} f$ et $\mathrm{Im} f$.