

Algèbre et Géométrie - TD n° 1

Ex. 1. Soit K un corps commutatif.

1. Reprendre la définition connue de la fonction

$$\det : M_n(K) \rightarrow K .$$

Montrer que, via l'identification naturelle $M_n(K) = [K^n]^n$ (laquelle?), \det est une forme n -linéaire alternée.

2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. En utilisant la correspondance connue entre endomorphismes et matrices carrées, introduire une fonction \det sur $\text{End}(E)$ et vérifier que cette fonction est bien définie.
3. Donner les définitions de
 - (a) valeur propre, vecteur propre d'un endomorphisme (d'une matrice), espace propre associé à une valeur propre, multiplicité algébrique, multiplicité géométrique.
 - (b) polynôme caractéristique d'une matrice et d'un endomorphisme.
4. Préciser le coefficient de X^{n-1} et le terme de degré 0 du polynôme caractéristique $P_A(X)$ d'une matrice $A \in M_n(K)$.

Ex. 2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres des matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 13 & -5 & -2 \\ -2 & 7 & -8 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Dans chaque cas préciser si la matrice est diagonalisable ou trigonalisable sur \mathbb{R} et donner, le cas échéant, explicitement une matrice semblable diagonale (respectivement triangulaire).

Ex. 3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre *complexe* de A . Montrer que $\bar{\lambda}$ est aussi une valeur propre de A et que, si l'on désigne par $E_\lambda \subset \mathbb{C}^n$ l'espace propre de A considérée comme matrice complexe, alors on a $E_{\bar{\lambda}} = \bar{E}_\lambda$.

Application: diagonaliser sur \mathbb{C} la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ex. 4. Exprimer la rotation R_θ d'angle θ dans le plan sous la forme

$$R_\theta \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A_\theta \in M_2(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser sur \mathbb{C} la matrice A_θ .

Même question pour la rotation R_θ^d d'angle θ autour d'une droite vectorielle

$$d = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^3.$$

Ex. 5. Calculer le polynôme minimal des matrices suivantes et préciser si elles sont diagonalisables ou non:

1. les 4 matrices de l'exercice 2;

2. la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) (discuter selon les valeurs de a, b et c).

Ex. 6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que A est diagonalisable et inversible. En déduire le polynôme minimal $m_A(X)$ et, en utilisant celui-ci, déterminer A^{-1} .

Ex. 7. Classifier, à similitude près, toutes les matrices nilpotentes d'ordre 5. Dans chaque cas, préciser le polynôme minimal.

Ex. 8. En discutant selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, déterminer les sous-espaces caractéristiques et donner une forme réduite de Jordan (en précisant une matrice de passage) de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4 + \alpha) & -4 & -1 & \end{pmatrix}$$

Ex. 9. Soit $A \in M_6(\mathbb{C})$ telle que

$$P_A(X) = (X - 1)^4(X - 2)^2, \quad m_A(X) = (X - 1)^2(X - 2).$$

Que peut-on dire des dimensions des espaces propres? Quelles sont les formes de Jordan possibles?