UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75
2002-2003

Algèbre et Géométrie - EXAMEN du 4 juin 2003

Ex. 1. (Questions de cours)

1. Introduire les notions d'espace hermitien, d'endomorphisme normal, d'endomorphisme hermitien (auto-adjoint) et d'endomorphisme unitaire dans un espace hermitien.
2. Énoncer et démontrer le théorème concernant la diagonalisabilité d'un endomorphisme normal.
3. Énoncer le théorème concernant la forme canonique d'un endomorphisme orthogonal dans un espace euclidien. Justifier le fait que $SO(n)$, considéré comme sous-espace topologique de $M_n(\mathbb{R})$, est connexe.

Ex. 2.
a) Donner la liste complète, à similitude près, des formes canoniques de Jordan des endomorphismes nilpotents u de $\mathbb{R}^6$. En utilisant une base par rapport à laquelle la matrice de u a pareille forme, déterminer dans chaque cas

1. le rang, l'indice de nilpotence, le polynôme caractéristique, le spectre et les vecteurs propres de u ;
2. le polynôme minimal et les espaces caractéristiques de u ;
3. l'exponentielle de u.

b) Soit A une matrice nilpotente $\in M_6(\mathbb{R})$ d'indice de nilpotence maximal, mise sous forme normale de Jordan (celle-ci étant donc unique a similitude près). Résoudre l'équation différentielle

$$x'(t) = A\ x(t)\ ,$$

en fonction de la condition initiale $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^6$.

Ex. 3.
Soient (E, h) un espace hermitien et $u \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme antihermitien, c'est à dire un endomorphisme de la forme iv, où v est un endomorphisme hermitien (auto-adjoint) de E. Montrer que $\exp(u) \in U(E)$.

Ex. 4.
Soient $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathrm{End}(E)$. On désigne par $\|\cdot\|$ et d la norme et la distance associées au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$.
a) Démontrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $u^*u = \mathrm{id}_E$.
2. $uu^* = \mathrm{id}_E$.
3. La matrice de u dans une base orthonormale est orthogonale.
4. $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tous x, $y \in E$.
5. $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.
6. $d(u(x), u(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$.

b) Démontrer que l'ensemble $O(E) \subset \mathrm{End}(E)$ des endomorphismes qui vérifient ces propriétés est un groupe pour la composition.
c) Démontrer que $O(n) \subset M_n(R)$ est compact pour la topologie induite.

Ex. 5. Soit $\mathbb{H} := \{q = a + bi + cj + dk |\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{R}\}$ l'algèbre réelle non commutative des *quaternions*, où i, j, k sont des symboles formels. L'addition dans $\mathbb{H}$ est induite par l'identification naturelle $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$, tandis que la multiplication est définie par les conditions :
a) 1 est l'élément neutre pour la multiplication.
b) $(p, q) \mapsto pq$ est $\mathbb{R}$-bilinéaire.
c) $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.
Pour un quaternion $q = a + bi + cj + dk$, on pose

$\bar{q} := a - bi - cj - dk$ (le *conjugué quaternionien de* q) et $|q| := \|q\| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

On désigne par $\mathbb{S}^3$ l'ensemble des quaternions de norme 1 (c'est une *sphère* de dimension 3).

I. Montrer que :

1. $xq = qx$ pour tous $x \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{H}$.
2. $q\bar{q} = |q|^2$.
3. $\overline{qp} = \bar{p}\ \bar{q}$ pour tous $p,\ q \in \mathbb{H}$.
4. $|pq| = |p|\ |q|$ pour tous $p,\ q \in \mathbb{H}$. (*Indication : utiliser 2, 3 et 1.*)
5. $\mathbb{H}$ est en fait un *corps*.
   Indication : s'inspirer de l'exemple analogue du corps des complexes, défini au départ comme $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par le symbole formel i vérifiant la relation $i^2 = -1$.
   On notera que l'on peut identifier $\mathbb{C}$ à un sous-corps de $\mathbb{H}$.

II. Montrer que $\mathbb{S}^3$ est un sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{H}^*$.

III. Pour tout $q \in \mathbb{H}$ on définit l'endomorphisme $g(q) \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{H})$ par la condition

$$g(q)(x) := qx\ .$$

(la *multiplication à gauche* par q).

1. Donner la matrice de $g(q)$ en fonction des composantes de $q = a + bi + cj + dk$.
2. Démontrer que $g(q) \in SO(4)$ $(:= SO(\mathbb{R}^4) = SO(\mathbb{H}))$ pour tout quaternion $q \in \mathbb{S}^3$.
3. Démontrer que $g|_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \to SO(4)$ est un morphisme de groupes.
4. Est-ce que $g|_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \to SO(4)$ est injectif ?
5. Est-ce que $g|_{\mathbb{S}^3} : \mathbb{S}^3 \to SO(4)$ est surjectif ?