UNIVERSITÉ DE PROVENCE LICENCE DE MATHÉMATIQUES - 2LMAT75
2002-2003

Algèbre et Géométrie - EXAMEN du 16 septembre 2003

Ex. 1. (Questions de cours)

1. Démontrer qu'un endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension finie V sur un corps commutatif K est diagonalisable si est seulement si son polynôme minimal est scindé sur K et n'a que des racines simples.
2. (a) Démontrer que $A \in O(2)$ si et seulement si il existe $\alpha \in [0, 2\pi)$ tel que
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$
   (b) Dans chaque cas, déterminer $\mathrm{Spec}_{\mathbb{R}}(A)$, $\mathrm{Spec}_{\mathbb{C}}(A)$ et préciser si A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
   (c) Démontrer que $O(2)$ est un sous-espace compact de $M_2(\mathbb{R})$.
   (d) Démontrer que $SO(2)$ est isomorphe au groupe multiplicatif
$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} | \; |z| = 1\} \subset \mathbb{C}^*$$

Ex. 2.

Considérons la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & -(4+\alpha) & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R} \, .$$
En discutant selon les valeurs de α, déterminer

1. le polynôme caractéristique de A,
2. les valeurs propres de A,
3. leur multiplicités algébriques,
4. leur multiplicités géométriques,
5. les espaces propres de A,
6. le polynôme minimal de A,
7. une forme réduite de Jordan J de A
8. ainsi qu'une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme défini par A est J.

Ex. 3.

Soit (E, h) un espace hermitien. Désignons par $\mathrm{Herm}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes hermitiens (auto-adjoints) de E et par $\mathrm{Herm}_+(E) \subset \mathrm{Herm}(E)$ le sous-ensemble des endomorphismes hermitiens à valeurs propres strictement positives.

1. Démontrer que l'application $\exp : \mathrm{Herm}(E) \to \mathrm{Herm}_+(E)$ est bijective.
2. Démontrer que $\exp(i\mathrm{Herm}(E)) \subset U(E)$, où $U(E)$ désigne le groupe des automorphismes unitaires de l'espace hermitien E.
3. Est-ce que l'application $\exp : i\mathrm{Herm}(E) \to U(E)$ est surjective ?
4. Est-ce que l'application $\exp : i\mathrm{Herm}(E) \to U(E)$ est injective ?

Indication : Utiliser les théorèmes de diagonalisation.