

Algèbre et Géométrie - PARTIEL, 2 mai 2003

**Ex. 1.** (Questions de cours)

Énoncer et démontrer les critères de diagonalisation vus en cours.

*Rappel : Il y en a 4+1, le dernier utilisant le polynôme minimal.*

**Ex. 2.** ( Jordanisation)

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 15 sur un corps commutatif  $K$  et  $u \in \text{End}(E)$  tel que  $\text{Spec}(u) = \{a, b\}$ ,  $a \neq b$ .

On sait que

$$\dim[\ker(u - a\text{id}_E)] = 3, \quad \dim[\ker(u - a\text{id}_E)^2] = 6, \quad \dim[\ker(u - a\text{id}_E)^3] = 8$$

$$\dim[\ker(u - b\text{id}_E)] = 4, \quad \dim[\ker(u - b\text{id}_E)^2] = 7.$$

Préciser :

1. Le polynôme caractéristique de  $u$ .
2. Est-ce que  $u$  est trigonalisable ? Pourquoi ?
3. Les dimensions des espaces caractéristiques  $N_a, N_b$  et des espaces propres  $E_a, E_b$  de chaque valeur propre.
4. Les multiplicités algébriques et géométriques de chaque valeur propre.
5. Le polynôme minimal de  $u$ .
6. La forme canonique de Jordan de  $u$ .
7. La matrice de la puissance  $n$ -ième de  $u$  dans une base dans laquelle  $u$  prend sa forme canonique de Jordan.
8. La matrice de  $\exp(u)$  dans une base dans laquelle  $u$  prend sa forme canonique de Jordan) (pour cette question on suppose  $K = \mathbb{R}$ ).