

Algèbre et Géométrie - TD n° 2

Ex. 1. (puissance d'une matrice, l'exponentielle sur l'espace des matrices)

a) Soient $g \in \text{End}(E)$ un endomorphisme diagonalisable, λ_i ($1 \leq i \leq k$) ses valeurs propres et $m_i := \text{mult}_a(\lambda_i)$. Soit (f_1, \dots, f_n) une base de E dans laquelle la matrice de g est

$$D_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}^{m_1, \dots, m_k} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 I_{m_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 I_{m_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k I_{m_k} \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice de g^n dans une base (e_1, \dots, e_n) en utilisant la matrice de passage $P \in M_n(K)$ définie par

$$(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)P.$$

Application: Déterminer les puissances n-ièmes des matrices

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 \\ -12 & -7 & 0 & 0 \\ 20 & 11 & -6 & -12 \\ -12 & -6 & 6 & 11 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & \log_a b & \log_a c \\ \log_b a & 1 & \log_b c \\ \log_c a & \log_c b & 1 \end{pmatrix},$$

où a, b, c sont trois nombres réels strictement positifs et différents de 1 ($n \in \mathbb{N}$).

b) La matrice

$$J_\lambda^r := \left. \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right\} r$$

s'appelle *bloc de Jordan* de valeur propre λ et de taille r .

Calculer les puissances n-ièmes de J_λ^r ($n \in \mathbb{N}$).

c) (l'exponentielle sur l'espace des matrices)

1. Soit $Y \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{Y^n}{n!}$ est convergente (avec la convention $Y^0 = I_n$).

Indication: Utiliser la norme

$$\|\cdot\|: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \|Y\| := \sup\{\|Y(v)\| \mid v \in \mathbb{C}^n, \|v\|=1\}$$

sur l'espace des matrices complexes carrées et le fait que cette norme est sous-multiplicative.

2. On pose $\exp(Y) := \sum_{n \geq 0} \frac{Y^n}{n!}$. Calculer $\exp(D_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}^{m_1, \dots, m_k})$ et $\exp(J_\lambda^r)$.

Indication: Observer que $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$ si $AB = BA$, écrire $J_\lambda^r = J_0^r + \lambda I_r$ et enfin utiliser le fait que J_0^r est une matrice nilpotente.

Ex. 2. (systèmes différentiels linéaires ordinaires)

1. Démontrer que l'application $\exp : M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ est différentiable et citer le théorème concernant les séries de fonctions utilisé. Démontrer que, pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$, la dérivée de l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tA)$ est

$$\frac{d}{dt} \exp(tA) = A \exp(tA) = \exp(tA)A .$$

2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $\dot{x} (:= \frac{dx}{dt}) = Ax$ le système différentiel linéaire associé à A . Démontrer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, l'application $\varphi_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \exp(tA)x_0$ est l'unique solution maximale du système qui vérifie la condition initiale $\varphi_{x_0}(0) = x_0$.
3. Résoudre explicitement le système de la question 2 dans les cas $A = D_{\lambda_1, \dots, \lambda_k}^{m_1, \dots, m_k}$ et $A = J_\lambda^r$. Généraliser les résultats obtenus à une matrice A semblable à l'une de ces deux matrices.

Ex. 3. (sous-espaces d'un espace vectoriel complexifié)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et soit $E^{\mathbb{C}} = \{x + iy \mid x, y \in E\}$ son complexifié. Soit $\bar{\cdot} : E^{\mathbb{C}} \rightarrow E^{\mathbb{C}}$ l'isomorphisme \mathbb{R} -linéaire définie par $x + iy \mapsto x - iy$, et $F \subset E^{\mathbb{C}}$ un sous-espace *complexe* de $E^{\mathbb{C}}$.

1. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes:

- (a) $F \cap E = \{0\}$.
- (b) $F \cap \bar{F} = \{0\}$ (c. à d. F et \bar{F} sont en somme directe).
- (c) L'application $\varphi : F \rightarrow (F + \bar{F}) \cap E$ donnée par $\varphi(x) = x + \bar{x}$ est bijective (donc est un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire).

2. Soit (f_1, \dots, f_k) une base de F sur \mathbb{C} , et soient $u_i := f_i + \bar{f}_i$ et $v_i := i(f_i - \bar{f}_i)$. Démontrer que le système $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k)$ est une base du sous-espace réel $(F + \bar{F}) \cap E \subset E$.

Ex. 4. (valeurs propres complexes d'un endomorphisme réel)

Soit E un espace vectoriel réel de dimension n et $f \in \text{End}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre complexe de f et soient $E_\lambda^{\mathbb{C}}$ et $E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}$ les sous-espaces propres associés à λ et $\bar{\lambda}$ respectivement. Démontrer que

1. $E_\lambda^{\mathbb{C}} \cap E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}} = \{0\}$, $\dim_{\mathbb{R}}[(E_\lambda^{\mathbb{C}} + E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}) \cap E] = 2 \text{mult}_f(\lambda)$
2. Le sous-espace $E_{\lambda, \bar{\lambda}} := (E_\lambda^{\mathbb{C}} + E_{\bar{\lambda}}^{\mathbb{C}}) \cap E \subset E$ est f -invariant.
3. En utilisant l'exercice précédent, démontrer que le sous-espace $E_{\lambda, \bar{\lambda}}$ admet une base $(u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_k)$ telle que

$$f(u_i) = \text{Re}(\lambda)u_i + \text{Im}(\lambda)v_i, \quad f(v_i) = -\text{Im}(\lambda)u_i + \text{Re}(\lambda)v_i$$

4. Calculer $\det(f|_{E_{\lambda, \bar{\lambda}}})$.

Ex. 5. Soit $K_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans K de degré inférieur ou égal à d . Soit $\delta : K_d[X] \rightarrow K_d[X]$ l'endomorphisme donné par la dérivation formelle $P(X) \mapsto P'(X)$. Montrer que δ est nilpotent, calculer son indice de nilpotence, $P_\delta(X)$ et $m_\delta(X)$; enfin, trouver une base dans laquelle la matrice de δ est sous forme de Jordan.

Indication: On considérera d'abord le cas où $\text{car}(K) = 0$.