

Algèbre et Géométrie - TD n° 3

Ex. 1. (Cauchy-Schwarz) Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que

$$|\langle x, y \rangle_h| \leq \|x\|_h \|y\|_h \quad \forall x, y \in E.$$

Ex. 2. (orthogonal, biorthogonal) Soit h une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. bilinéaire symétrique) sur l'espace complexe (resp. réel) de dimension finie E , et soit $N(h)$ le noyau de h . Démontrer que pour tout sous-espace $F \subset E$ on a

1. $\dim(E) - \dim(F^{\perp_h}) = \dim(F) - \dim(F \cap N(h))$.
2. $(F^{\perp_h})^{\perp_h} = F + N(h)$

Ex. 3. (le produit scalaire L^2). Démontrer que la formule

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt$$

définit un produit scalaire hermitien sur l'espace $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$ des fonctions continues à valeurs complexes sur l'intervalle $[a, b]$. L'espace prehilbertien $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ est-il un espace hilbertien ? Justifier votre réponse.

Ex. 4. (classification des espaces euclidiens et hermitiens)

Soient (E, f) et (E', f') deux espaces euclidiens (resp. hermitiens) de même dimension. Démontrer qu'il existe un isomorphisme $u : E \rightarrow E'$ tel que

$$\langle u(x), u(y) \rangle_{f'} = \langle x, y \rangle_f \quad \forall x, y \in E.$$

Ex. 5. Soit (E, h) un espace hermitien. Démontrer que $f := \operatorname{Re}(h)$ est un produit scalaire sur E , tandis que $\omega := \operatorname{Im}(h)$ est une forme antisymétrique non-dégénérée sur E .

Ex. 6.

1. Soit K un corps commutatif quelconque. Démontrer que l'application

$$M_n(K) \times M_n(K) \rightarrow K, (A, B) \mapsto \operatorname{tr}(AB)$$

est une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée. Montrer que, sur $\mathfrak{sl}(2, K)$, la forme quadratique associée à la forme $(A, B) \rightarrow \operatorname{tr}(AB)$ est donnée par $A \mapsto -2 \det(A)$.

2. Démontrer que l'application $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^t \bar{A} B)$ est un produit scalaire hermitien sur $M_n(\mathbb{C})$. En déduire que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}({}^t A B)$ définit un produit scalaire euclidien sur $M_n(\mathbb{R})$.

Ex. 7. (groupes classiques compacts) Montrer que les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$, considérés comme sous-espaces topologiques de l'espace euclidien $M_n(\mathbb{R})$ (resp. $M_n(\mathbb{C})$), sont compacts. Les groupes $GL(n, \mathbb{R})$, $GL(n, \mathbb{C})$, $SL(n, \mathbb{R})$ et $SL(n, \mathbb{C})$ sont-ils compacts ?

Ex. 8. (algèbres de Lie des groupes $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$).

Désignons par

$$\mathfrak{so}(n) := \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^t a = -a\}$$

$$\text{(resp. } \mathfrak{u}(n) := \{a \in M_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{a} = -a\}, \text{ resp. } \mathfrak{su}(n) := \{a \in \mathfrak{u}(n) \mid \operatorname{tr}(a) = 0\})$$

le sous-espace des matrices antisymétriques (resp. antihermitiennes, resp. antihermitiennes à trace nulle).

1. Soit $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M_n(\mathbb{R})$ (resp. $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M_n(\mathbb{C})$) un chemin différentiable tel que
 - (a) $\gamma(0) = I_n$
 - (b) $\text{im}(\gamma) \subset SO(n)$ (resp. $\text{im}(\gamma) \subset U(n)$, resp. $\text{im}(\gamma) \subset SU(n)$).
 Démontrer que $\dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{so}(n)$ (resp. $\dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{u}(n)$, $\dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{su}(n)$).

2. Démontrer que pour tout $a \in \mathfrak{so}(n)$ (resp. $a \in \mathfrak{u}(n)$, resp. $a \in \mathfrak{su}(n)$) le chemin différentiable $t \mapsto \exp(ta)$ satisfait aux propriétés (a) et (b).
3. En déduire que

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(n) &= \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}), \gamma(0) = I_n, \text{im}(\gamma) \subset SO(n)\}, \\ \mathfrak{u}(n) &= \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}), \gamma(0) = I_n, \text{im}(\gamma) \subset U(n)\} \\ \text{et } \mathfrak{su}(n) &= \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}), \gamma(0) = I_n, \text{im}(\gamma) \subset SU(n)\}. \end{aligned}$$

Quelle est l'interprétation géométrique de ces égalités ?

4. Une K -algèbre de Lie est un K -espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une application bilinéaire antisymétrique $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ qui satisfait à l'identité de Jacobi

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

Montrer que, pour toute K -algèbre associative A , le crochet de Lie

$$(a, b) \mapsto [a, b] := ab - ba$$

définit une structure de K -algèbre de Lie sur A . En particulier, pour $M_n(K)$, celle-ci est désignée par $\mathfrak{gl}(n, K)$. Montrer

- (a) que $\mathfrak{sl}(n, K) := \{a \in \mathfrak{gl}(n, K) \mid \text{tr}(a) = 0\}$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{gl}(n, K)$, c. à d. que $\mathfrak{sl}(n, K)$ est stable pour le crochet de Lie et
 - (b) que $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{u}(n)$ et $\mathfrak{su}(n)$ sont des sous-algèbres de Lie réelles de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ (resp. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$).
5. Montrer que l'image de $\mathfrak{so}(n)$ (resp. $\mathfrak{u}(n)$ et $\mathfrak{su}(n)$) par l'application exponentielle coïncide avec $SO(n)$ (resp. $U(n)$, resp. $SU(n)$).

Ex. 9.

1. Soit $a \in M_n(\mathbb{C})$. Démontrer que

$$\det(\exp(a)) = e^{\text{tr}(a)}.$$

Indication : Vérifier d'abord cette identité pour les matrices supérieures triangulaires.

2. Montrer que

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{R}), \gamma(0) = I_n, \text{im}(\gamma) \subset SL(n, \mathbb{R})\}$$

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\xrightarrow{\mathcal{C}^1} M_n(\mathbb{C}), \gamma(0) = I_n, \text{im}(\gamma) \subset SL(n, \mathbb{C})\}$$

et donner l'interprétation géométrique de ces égalités.