Question de cours. 1. Donner la définition d'un sous-espace caractéristique.

2. Démontrer que la dimension d'un sous-espace caractéristique est égale à la multiplicité algébrique de la valeur propre correspondante.

Exercice I. Soit E le plan vectoriel réel. Soit f un endomorphisme linéaire de E dont le polynôme caractéristique est $P_f(X) = X^2 + 1$.

1. Quelles sont les valeurs propres réelles et complexes de f ?

2. Soit u un vecteur non-nul de E.

a. Montrer que $(u, f(u))$ est une base de E.

b. Montrer que $f^2(u) = -u$.

c. Donner la matrice de f dans la base $(u, f(u))$.

3. Déduire de la question précédente que deux endomorphismes de E dont le polynôme caractéristique est $X^2 + 1$ sont conjugués (ou, ce qui revient au même, que deux matrices réelles de polynôme caractéristique $X^2 + 1$ sont semblables).

On considère maintenant E un espace vectoriel réel de dimension 4. Soit f un endomorphisme linéaire de E dont le polynôme minimal est $m_f(X) = X^3 - X^2 + X - 1$.

4. Quelles sont les valeurs propres réelles et complexes de f ?

5. Rappeler les relations entre les polynômes caractéristique et minimal d'un endomorphisme.

6. Donner le polynôme caractéristique P_f de f.

7. Donner la dimension du sous-espace caractéristique N_1 associé à la valeur propre 1.

8. Donner la dimension de $\ker(X^2 + 1)(f)$.

9. Donner la multiplicité géométrique de la valeur propre 1.

10. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice II. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de A.

2. Calculer les sous-espaces propres et caractéristiques de A et préciser leurs dimensions.

3. Donner le polynôme minimal de A.

4. Donner la forme de Jordan de A.

5. Préciser une matrice de passage P telle que $P^{-1}AP$ est une matrice de Jordan.