Exercice I. Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence

$$\begin{cases} u_0 = -1;\ u_1 = 9;\ u_2 = 13 \\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 4u_n \end{cases}$$

Exercice II. Montrer que deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice III. On considère l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner un vecteur propre f_1 de la transposée de A associé à la valeur propre 2.

2. Montrer que le noyau K_1 de f_1 est stable par φ.

3. Décrire la restriction de φ à K_1.

4. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ où la matrice de φ est triangulaire.

Exercice IV. **1.** Soit I un ensemble. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $f\ : I \to \mathbb{K}$ une application et $\tilde{f}$ la forme linéaire définie par $\tilde{f}(e_i) = f(i)$. Montrer que l'application $f \mapsto \tilde{f}$ est une bijection entre $\mathbb{K}^I$ et le dual de E. Un espace vectoriel et son dual sont-ils toujours isomorphes ?

2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montre que l'application naturelle de E dans son bidual est toujours un isomorphisme.

Exercice V. Soit f et g deux endomorphismes linéaires d'un k-espace vectoriel E de dimension finie qui commutent ($f \circ g = g \circ f$).

1. Montrer que tout sous-espace caractéristique de l'un est invariant par l'autre.

2. Montrer que si ils sont tous les deux trigonalisables alors ils sont simultanément trigonalisables.

3. Montrer que si ils sont tous les deux diagonalisables alors ils sont simultanément diagonalisables.

Exercice VI. **CAUCHY-SCHWARZ.** Soit E un espace vectoriel complexe et φ une forme hermitienne positive. Démontrer que

$$\forall\, x, y \in E, \quad |\varphi(x,y)|^2 \le \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

Décrire les cas d'égalité.

Exercice VII. **1.** Tracer la conique $x^2 + 2xy = 4$.

2. Montrer que l'équation $x^2 + 7y^2 + z^2 + 8xy + 16xz - 8yz + 30x - 24y + 20z = 63$ définit un hyperboloïde de révolution dont on déterminera le centre et l'axe de rotation.