Sur le nombre d’or…

1) Des observations dans la nature, d’abord.

- Observons les pétales des fleurs :

Nombre de pétales	Fleurs
3	Trèfle, iris
5	Lys, pomme, primevères, bouton d’or
8	Delphinium, clématite, spirales d’ananas descendantes
13	Soucis, spirales d’ananas montantes
21	Asters
34	Marguerite, pâquerette, Spirales de tournesol sens aiguille montre
55	Spirales de tournesol sens trigo

- Observons les proportions d’un être humain :

Appelons h la taille et H la hauteur « nombril -sommet du crâne » :

Alors : $\frac{h}{H}=\frac{H}{h-H}$, peu différent de 1,618

On retrouve cette proportion en mesurant le quotient de la hauteur de la tête par la distance « base du nez, sommet du crâne »….

- Voyons l’évolution d’une population :

  En janvier, un couple de lapins, né en décembre, est amené sur une île ; en février, naît un couple de lapins, supposons que le rythme de reproduction de ces lapins sur l’île, sans télé, internet etc … Soit le suivant :

  Chaque couple de lapins donne dès le $2^{\text{ième}}$ mois de son existence, et chaque mois, naissance à un couple de lapins ; quelle est l’évolution de cette population sur une courte période, sans tenir compte des décès ?

Janvier	1
Février	2
Mars	3
Avril	5
Mai	8
juin	13
Juillet	21
Août	34
Septembre	55
Octobre	89…

La règle de calcul est simple : $U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$

En effet, le nombre de couples de lapins nés le mois (n+2) est égal à la somme de ceux déjà là deux mois auparavant, parmi lesquels seuls ceux qui sont nés au moins un mois avant donnent naissance à un couple de lapins.

Le mathématicien Léonard de Pise, dit « Fibonacci » a mis en évidence ce modèle de suite mathématique ; il a été montré que la limite de cette suite est infinie, mais que le rapport de deux termes consécutifs tend vers une limite finie :

L = $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ solution d'une équation de degré 2 **:** $x^2 - x - 1 = 0, soit : x = \frac{1}{x-1}$

Une valeur approchée de L est : 1,618, tiens tiens…

2) Observations en architecture

- Le Parthénon d'Athènes (Phidias, 5^{ième} siècle avant notre ère) : le rectangle constituant la partie supérieure a les proportions 1 pour 1,618.
- La grande pyramide d'Egypte : hauteur sur base, mêmes proportions.
- Grand nombre de statues de la renaissance…
- Grand nombre de tableaux de peinture de la renaissance à nos jours…

Questions : quels rapports entre ces observations ? Y a-il des lois cachées dans la nature ? Est-ce une coïncidence (invraisemblable d'un point de vue statistique…) Est-ce une création humaine qui imite la nature ? Dans ce cas, y a-t-il des lois de l'esthétique comme il y a des lois scientifiques ?

Les mathématiques vont, en partie, lever ce mystère…

D’un point de vue mathématique, tout a commencé, apparemment, avec les mathématiciens grecs, Euclide en particulier :

On trouve dans « Les Eléments » le problème suivant, appelé problème de « partage en extrême et moyenne raison », ; il consiste à prendre un segment, et à chercher sur celui-ci un point B tel que : $\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BF}$

A B F

B partage le segment $[AF]$ en extrême et moyenne raison

Ce problème était une étape vers la résolution de problèmes plus généraux de constructions géométriques à la règle et au compas ; en particulier, une fois ce problème résolu, il est facile de tracer à la règle et au compas un pentagone régulier.

Par une équation, on résout ce problème de partage, c’est très simple : posons

AF = h, AB = H, x = $\frac{h}{H}$: on a facilement x =$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

D’où l’équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Dont la solution positive est …$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Ce nombre est appelé φ, comme Phidias, et il est connu sous le nom de « nombre d’or. »

Il est facile de voir que construire un rectangle dont les proportions h et H sont telles que $\frac{h}{H}$ = φ, revient à construire sur le segment longueur un point B qui « partage le segment partage en extrême et moyenne raison » : alors, le rectangle obtenu en retirant au rectangle initial le carré de côté AB est encore un rectangle d’or et ainsi de suite …On reverra cela.

Construction d’un rectangle d’or :

A partir d’un carré ABCD de côté 1, placer le milieu I de $[AB]$; au compas, placer le point F intersection de la droite (AB) et du cercle de rayon IC=$\frac{\sqrt{5}}{2}$: alors on a

AF=$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$= Φ, donc $\frac{AF}{AB} = \varphi = \frac{AB}{BF} car BF = \varphi - 1 = \frac{1}{\varphi} = \frac{AB}{\varphi}$

Mais comment faire le lien entre les observations de la nature et ce qui découle d'activités mathématiques ?

On voit deux interrogations apparaître : lien entre esthétique et mathématique ; lien entre nature et mathématique : pour l'instant nous n'avons que des observations, ce nombre 1,618 comme point commun…

Une première réponse est apportée dans ce qui suit, où l'on va voir que le hasard géographique s'en mêle…

2) *Historique du nombre d'Or*

Passons sans transition des grecs anciens à la Renaissance italienne :

Dans les années 1500, un moine franciscain, Pacioli, traduit les Eléments d'Euclide en latin, et, intéressé par les mathématiques, publie un ouvrage en 1509 « De divine proportione », renommant ainsi « divine proportion » ce qu'Euclide avait appelé « partage en extrême et moyenne raison » : c'est ainsi, si l'on peut dire que Dieu se mêle de cette étrange affaire avec un moine comme intermédiaire.

Il se trouve, hasard, que la ville où Pacioli travaille est Borgo San Sépolcro…Vous ne connaissez pas ? C'est la ville de Piero Della Francesca ! Le peintre de la perspective, de la rigueur de construction va fasciner Lucas Pacioli, disciple de Della Francesca :

Presque aveugle à la fin de sa vie- il meurt en 1492-Della Francesca rédige des traités théoriques sur les lois de la perspective et des proportions d'une grande rigueur mathématique ; son Traité d'Arithmétique à l'usage des marchands est l'un des textes scientifiques les plus rigoureux du XVième siècle : son oeuvre inspirera aussi De Vinci et Dürer. C'est ainsi que Pacioli, à la fois théologien, géomètre, artiste se met à mesurer les monuments antiques et trouve cette constante qu'il trouve miraculeuse et baptise « divine proportione ».

Dans son ouvrage resté comme le livre fondateur du nombre d'Or (qui ne s'appelle pas encore ainsi), il va être aidé pour les illustrations par une star : Leonardo.

C'est de Vinci (et Della Francesca) qui coordonnent deux appendices à l'ouvrage de Pacioli :

Un traité de perfection en architecture et peinture ; un livre d'illustrations par Leonardo.

Ces artistes sont complémentaires :

De Vinci ne fait pas de math, mais cherche dans le monde la « beauté idéale », le corps idéal…Pour lui, l'artiste cherche à imiter Dieu : la divine proportione est synonyme de perfection.

Pacioli est théologien avant tout ; il nomme divine proportion cette quantité obtenue par un rapport de 3 nombres qu'il rapproche de la Trinité :

$$\frac{AF}{AB} = \frac{AB}{BF}$$

Il y voit une intervention divine partout…

Trois siècles plus tard…

En Allemagne, au XIX ième, se développe l'esthétique comme science distincte et indépendante ; l'époque est riche de scientifiques, le grand Gauss, prince des mathématiciens ; parallèlement, c'est l'époque de grandes fouilles en Grèce, dans une recherche de synthèse entre esthétique et science ; entre les années 1850 et 1870, le philosophe Zeising pose le problème :

« Y a t'il une loi unique et universelle qui gouverne la beauté ? »

Pythagore avait déjà donné au « beau » un fondement mathématique ; Zeising observe tout : nature, corps humain, plantes, peintures, architecture, successeur de Pacioli, il en conclut une relation entre beauté et divine proportion.

Alors, il nomme « section d'Or » cette proportion, et affirme que c'est Pythagore qui l'avait initialement découverte. Ainsi, il donne une solution subjective au problème de la codification du beau. Cela sera contesté par les mathématiciens dans l'ensemble qui, même s'ils admettent l'omniprésence de la section d'Or rejettent le principe de codification du beau. En tous cas, depuis Zeising, l'esthétique peut désormais, comme les sciences de la nature, proposer des constructions explicatives ; pour certains artistes, les mathématiques fournissent à la beauté une formule unique et deviennent ainsi le principe fondamentale de toutes les sciences ; la célèbre formule prophétique de Galilée : « la Nature est écrite en langage mathématique ; pour la comprendre, il nous faut d'abord étudier ce langage » se vérifie ; de toutes les solutions proposées pour résoudre le problème « du beau », seule la section d'Or a été retenue ; elle est désormais la loi fondamentale de l'esthétique.

Toute cette agitation va avoir des répercussions en France notamment ; les peintres Picasso, Seurat retiennent ce principe esthétique qualifié par Gauss de « principe de moindre effort » ; pourquoi moindre effort ? parce que 3 termes au lieu de 4 suffisent dans la proportion :

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a+b}$$

La construction de rectangle d'or à la règle et au compas est facile, une approximation retenue par les peintres est 8 pour 5.

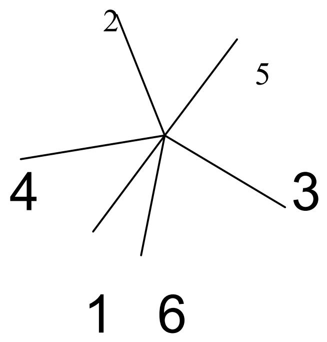
La Section d'Or est le nom donné à l'exposition de 1912 de Juan Gris, Fernand Léger, Picabia ; on veut alors donner au cubisme une base scientifique.

Enfin, la dénomination « nombre d'Or » est proposée par un ingénieur roumain, Matila, qui veut donner à Phi un statut analogue à Pi, e, etc. Il soutient en effet l'idée que l'histoire de ce nombre est ininterrompue depuis Pythagore, en dépit de périodes d'effacement apparent.En fait, Matila est un mystique (comme Pythagore, comme Pacioli…) plus intéressé par le rite que par la géométrie, mais pour qui les mathématiques sont un véhicule, une voie d'accès ; il est fasciné par le prestige de la Grèce antique, pour lui, la civilisation occidentale n'est que l'aboutissement des idées des Grecs en géométrie, en architecture et de la Renaissance dans les arts en général.

Pour conclure, peut-on parler de conception scientifique du beau ? il n'y a pas de démonstration, ce n'est qu'une grille de lecture jusqu'aux travaux récents de Douady :

Il s’agit d’une théorie de croissance des plantes par utilisation de modèles de simulation numérique ; pour commencer, il suffit de couper une pomme en deux dans le sens perpendiculaire à l’axe de la pomme : on y voit un magnifique pentagone régulier ; pourquoi ?

Allons voir une tige de plante ; on observe que les feuilles se situent le long de la tige avec un angle appelé angle de divergence d’environ 137 degrés ; vues de dessus, les feuilles se répartissent autour de la tige comme une étoile à 5 branches :



Les angles entre les feuilles 1-2, 2-3,3-4, 4-5 sont 137 degrés et garantissent la meilleure capture de la lumière ; ceci donne un angle de 52 entre 2-5, 4-1 ; mais alors, le sixième bourgeon n’est qu’à 32 degrés du premier : par manque de lumière, il ne va pas se développer ! et voilà pourquoi beaucoup de plantes ont 5 pétales…

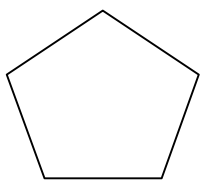
Quel rapport avec le nombre d’or ?

Le voici : divisons 360 degrés par Phi : on trouve 222,5 degrés, soit le complément à 360 de 137,5 degrés !

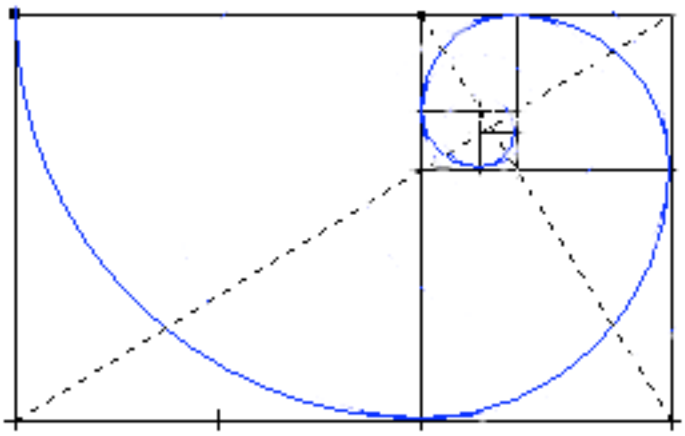
Le nombre d’Or est dans la nature…

On peut le voir dans la pomme, fruit décidément mystique depuis Eve :

C’est le rapport de la distance entre le premier et le troisième pétale par la distance entre le premier et le deuxième pétale.



La spirale d’or :



Rédigé le 26 mars 2006, sur Apple….

Bibliographie :

- *Marguerite Neveu, H.E Huntley :« Le nombre d’or », Point Sciences*
- *Ian Stewart : « La nature et les nombres » Hachette*
- *Rob Eastaway : « Pourquoi les bus arrivent par trois ? » Flammarion*
- *Piero Della Fransesca Edition Scala*

Sur internet, la page perso de Thérèse Eveilleau, Nombre d’Or.