CHAPITRE I

Logique et ensembles

I.1. Logique

– Tableaux de vérité.
– Implication, équivalence.
– ET & OU.
– Négation :

$$\text{Non[A OU B]} \iff \text{Non[A] ET Non[B].}$$
$$\text{Non[A ET B]} \iff \text{Non[A] OU Non[B].}$$

– Raisonnement par récurrence.
– Raisonnement par l'absurde :

$$[A \Rightarrow B] \iff \big[NON[B] \Rightarrow NON[A]\big].$$

Tableau résumé.

A	B	NON[A]	NON[B]	A ET B	A OU B	A $\Rightarrow$ B	B $\Rightarrow$ A	A $\Leftrightarrow$ B
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V

I.2. Parties d'une ensemble

Appartenance, inclusion.

Une partie A d'un ensemble E est définie par la relation d'appartenance :

$$x \in A.$$

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Il y a une relation d'inclusion entre les parties de E (qu'on peut considérer comme une *relation d'ordre* sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$) :

$$A \subseteq B \iff [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Remarque 1. C'est l'inclusion *au sens large* : on n'exclut pas $A = B$. D'ailleurs on a

$$[A \subseteq B] \text{ ET } [B \subseteq A] \iff A = B.$$

Si A est contenue dans B et $A \neq B$, on a l'inclusion *au sens strict* : $A \subsetneqq B$).

La partie $\emptyset$ (telle que $\forall x, x \notin \emptyset$) est la plus petite de toutes les parties, la partie E (telle que $\forall x, x \in E$) est la plus grande de toutes.

Union, intersection, complémentaire.

– *Union* d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

– *Intersection* d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

– *Complémentaire* d'une partie A de E :

$$\complement A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Proposition 2. *On a :*
- $\complement(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} \complement A_i$
- $\complement(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \complement A_i$

I.3. Applications

Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F fait correspondre à tout $x \in E$ un et un seul élément $y = f(x)$ de F (y est l'image de x par f). On note

$$f : E \mapsto F.$$

Exemple : l'*application identique* $id_E : E \mapsto E$ qui à tout $x \in E$ associe x, soit $id_E(x) = x$.

Définition 3. Soit $f : E \mapsto F$.
- On dit que f est *injective* ou que f est une *injection* si

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

- On dit que f est *surjective* ou que f est une *surjection* si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

- On dit que f est *bijective* ou que f est une *bijection* si elle est à la fois injective et surjective.

Application réciproque.

Si $f : E \mapsto F$ est bijective, à tout $y \in F$ correspond un élément et un seul $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On définit ainsi une application de F dans E. C'est l'*application réciproque de* f. On la note f^{-1}. On a

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Ainsi f et f^{-1} sont réciproques l'une de l'autre : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Application composée.

Soient $f : E \mapsto F$, et $g : F \mapsto G$, deux applications (l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde). On appelle *application composée* de f et de g on note $g \circ f$, l'application $g \circ f : E \mapsto G$, telle que

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

PROPOSITION 4. *Soit $f : E \mapsto F$ une application bijective. Alors f et la bijection réciproque f^{-1} sont liées par les relations*

$$f \circ f^{-1} = id_F, \quad f^{-1} \circ f = id_E.$$

Image directe.

DÉFINITION 5. Soient $f : E \mapsto F$ une application et A une partie de E. On appelle *image directe de A par f*, on note $f(A)$, la partie de F définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

REMARQUE 6. Ainsi f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

PROPOSITION 7. *Soit $f : E \mapsto F$ une application.*

- *Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subseteq B$, alors $f(A) \subseteq f(B)$.*
- *Soit $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties de E, alors*
  - $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,
  - $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$,

REMARQUE 8. On a l'égalité $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ si et seulement si f est injective.