CHAPITRE II

Rationnels et réels

II.1. Nombres irrationnels

Rappelons qu'on a
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Avec

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Cependant, les rationnels (positifs) ne suffisent pas à mesurer toute longueur. Par exemple, si un carré est de côté 1, donc de surface 1, le carré construit sur sa diagonale est de surface 2 (on peut évoquer le théorème de Pythagore : le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux côtés). On peut donc dire que la diagonale est de longueur $\sqrt{2}$. Or il n'y a pas de nombre rationnel dont le carré soit 2. La preuve suivante se trouve chez Aristote :

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\frac{p}{q}$ soit tel que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \tag{II.1.1}$$

On peut toujours supposer que $\frac{p}{q}$ est sous forme irréductible (p et q n'ont pas de facteur commun). De (II.1.1) on tire $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc p est pair : on peut écrire $p = 2a$, où a est un entier. On tire $4a^2 = 2q^2$ donc $2a^2 = q^2$. Mais alors q est pair. Contradiction : la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas sous forme irréductible (p et q sont pairs). $\square$

On dit que $\sqrt{2}$ est un *irrationnel*. On montre de même que $\sqrt{n}$ est irrationnel pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier). Cependant $\sqrt{2}$ peut être arbitrairement approché par un rationnel, c'est ce qu'on expose ensuite.

Moyenne arithmétique, moyenne géométrique. Rappelons la formule suivante (pour deux nombres α, β, rationnels, réels ou complexes)

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \alpha\beta.$$

Il en résulte, pour $\alpha, \beta > 0$, qu'on a

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$$

et en fait, avec inégalité stricte sauf si (et seulement si) $\alpha = \beta$. Autrement dit, la *moyenne arithmétique* est supérieure à la *moyenne géométrique*.

Approximations de $\sqrt{2}$. Posons $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 2$ (ainsi $\alpha_0\beta_0 = 2$) puis par récurrence,

$$\beta_n = \frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}}{2}, \quad \alpha_n = \frac{2}{\beta_n}$$

(on a donc $\alpha_n\beta_n = 2$ pour tout n). Ainsi

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = 1, & \beta_0 = 2, \\ \alpha_1 = \frac{4}{3}, & \beta_1 = \frac{3}{2}, \\ \alpha_2 = \frac{24}{17}, & \beta_2 = \frac{17}{12}, \\ \dots & \dots \end{array}$$

Ainsi de suite. On voit qu'on a les inégalités

$$\alpha_{n-1} < \alpha_n < \sqrt{2} < \beta_n < \beta_{n-1}.$$

En effet, β_n est la moyenne arithmétique du couple précédent, et $\sqrt{2}$ la moyenne géométrique, donc $\alpha_{n-1} < \sqrt{2} < \beta_n < \beta_{n-1}$, et la place de α_n se déduit de la relation $\alpha_n\beta_n = 2$ pour tout n. Ainsi les suites (α_n) et (β_n) encadrent $\sqrt{2}$. Par ailleurs la différence $\Delta_n = \beta_n - \alpha_n$ décroît très vite. En effet on a

$$\Delta_2 = \frac{17}{12} - \frac{24}{17} = \frac{17^2 - 12.24}{12.17} = \frac{1}{204} < 5.10^{-3}.$$

Et on peut calculer Δ_n à partir de Δ_{n-1} :

$$\Delta_n = \beta_n - \frac{2}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}}{2} - \frac{4}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} = \frac{\big(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\big)^2 - 8}{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}.$$

Or $\alpha_{n-1}\beta_{n-1} = 2$, donc $\big(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\big)^2 - 8 = \big(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}\big)^2$. Ainsi

$$\Delta_n = \frac{\Delta_{n-1}^2}{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}.$$

Or $2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}) = 4\beta_n > 4\sqrt{2} > 5$. On tire $\Delta_n < \frac{\Delta_{n-1}^2}{5}$. Ainsi on a

$$\begin{array}{l} \Delta_3 < \frac{\left(5.10^{-3}\right)^2}{5} = 5.10^{-6}, \\ \Delta_4 < \frac{\left(5.10^{-6}\right)^2}{5} = 5.10^{-12}, \\ \dots \end{array}$$

II.2. Corps commutatif

On admet donc l'existence de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ contenant strictement l'ensemble des rationnels (ainsi que l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes). En résumé on a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

L'ensemble des réels est muni d'une *somme* et d'un *produit*.

La somme. On note $x + y$ la somme de x et de y. La somme est

- *associative* :

$$\forall x, y, z,\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

- *commutative* :

$$\forall x, y,\ x + y = y + x$$

- 0 est *élément neutre* de la somme :

$$\forall x,\ 0 + x = x + 0 = x$$

- tout $x \in \mathbb{R}$ admet un *opposé* (noté $-x$) :

$$x + (-x) = 0.$$

On note $x - y$ pour $x + (-y)$, on dit que c'est la *différence* de x et de y.

Le produit. On note xy le produit de x et de y. Le produit est

- *associatif* :

$$\forall x, y, z,\ (xy)z = x(yz)$$

- *commutatif* :

$$\forall x, y,\ xy = yx$$

- *distributif par rapport à la somme* :

$$\forall x, y, z,\ x(y + z) = xy + xz \quad \text{et} \quad (y + z)x = yx + zx$$

- 1 est *élément neutre* du produit :

$$\forall x,\ 1x = x1 = x$$

- tout $x \neq 0$ admet un *inverse* (noté x^{-1}) :

$$xx^{-1} = 1.$$

On dit que $\mathbb{R}$ est un *corps commutatif* (car le produit est commutatif).

Remarques 9. (1) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes sont aussi des corps commutatifs (la somme et le produit qui y sont définis jouissent des mêmes propriétés).

(2) L'élément 0 qui est neutre pour la somme est *absorbant* pour le produit : $\forall x$, $0x = x$. Cela peut se *démontrer* à partir des règles de calcul précédentes. Il en résulte que 0 n'a pas d'inverse.

(3) On peut aussi démontrer la *règle des signes* : $\forall x, y$,
- $(-x)y = x(-y) = -(xy)$.
- $(-x)(-y) = xy$.

Rationnels et irrationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est une partie de $\mathbb{R}$ son complémentaire est formé des nombres dits *irrationnels.* L'opposé, l'inverse d'un rationnel est un rationnel, la somme, le produit de deux rationnels est un rationnel. Il en résulte que la somme et le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel :

Proposition 10. (1) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}, \alpha\beta \in \mathbb{Q}$.
(2) $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \alpha + \beta \notin \mathbb{Q}, \alpha\beta \notin \mathbb{Q}$.

Remarque 11. La somme et le produit de deux irrationnels peut aussi bien être un rationnel qu'un irrationnel. Par exemple :

$$\sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \in \mathbb{Q}.$$

II.3. Corps ordonné

On peut comparer deux réels : on écrit $x \leq y$ si x est *inférieur ou égal* à y. Cette relation est

- *reflexive* :

$$\forall x,\ x \leq x$$

- *antisymétrique* :

$$x \leq y \text{ et } y \leq x \Longleftrightarrow \ x = y$$

- *transitive* :

$$x \leq y \text{ et } y \leq z \Longrightarrow \ x \leq z$$

On dit que c'est une *relation d'ordre* et que $\mathbb{R}$ est un *ensemble ordonné.*

On a un autre exemple d'ensemble ordonné avec l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E. La relation d'inclusion $A \subseteq B$ est une relation d'ordre (elle est reflexive, antisymétrique et transitive). On note qu'il existe des parties incomparables ; par exemple, dans $\mathbb{N}$, la partie formée des nombres pairs ne se compare pas à celle formée des nombres impairs. On dit que l'ordre est *partiel.* En revanche, on, peut toujours comparer deux réels :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit que l'ordre est *total* ou que $\mathbb{R}$ est *totalement ordonné.*
On note $x < y$ pour x *strictement inférieur* à y (soit $x \leq y$ *et* $x \neq y$).

L'ordre de $\mathbb{R}$ est *compatible* avec la structure de corps :

- Si $x \leq y$, alors, $\forall a, x + a \leq y + a$.
- Si $x \leq y$, alors, $\forall a \geq 0, ax \leq ay$.

On dit que $\mathbb{R}$ est un *corps ordonné.*

On peut en déduire d'autres propriétés, par exemple :

- $x \leq y \Longleftrightarrow -y \leq -x$
- Si $x \leq y$, alors, $\forall a \leq 0, ay \leq ax$.
- $0 < x \leq y \Longleftrightarrow 0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.
- $\forall x, x^2 \geq 0$.

Remarque 12. Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est aussi un corps ordonné (ce qui est vrai des réel l'est en particulier des rationnels). En revanche, il n'est pas possible de munir le corps $\mathbb{C}$ des complexes d'une relation d'ordre compatible avec la structure. En effet, on aurait $1 \geq 0$ (puisque 1 est un carré) donc $-1 \leq 0$, or -1 aussi est un carré.

Intervalles. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

- L'*intervalle fermé* $[\alpha, \beta]$ est l'ensemble
$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}.$$
- L'*intervalle ouvert* $]\alpha, \beta[$ est l'ensemble
$$]\alpha, \beta[= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}.$$
- L'*intervalle semi ouvert* $[\alpha, \beta[$ est l'ensemble
$$[\alpha, \beta[= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}.$$
- L'*intervalle semi ouvert* $]\alpha, \beta]$ est l'ensemble
$$]\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}.$$

On définit de même les intervalles $[\alpha, +\infty[,]\alpha, +\infty[,]-\infty, \alpha[,]-\infty, \alpha]$. Par exemple
$$[\alpha, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x\}.$$
Enfin, l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier.

II.4. $\mathbb{R}$ est archimédien

Partie entière. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers *balise* l'ensemble des réels, c'est à dire que tout nombre réel est intercalé entre deux entiers :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leq x < n+1.$$
Le plus grand entier n tel que $n \leq x$ s'appelle la *partie entière* de x, on le note $[x]$. On a donc
$$x = [x] + \epsilon, \text{ avec } 0 \leq \epsilon < 1.$$
Le *reste* ϵ est nul si et seulement si x est un entier.

On tire facilement le corollaire suivant.

Corollaire 13. *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$, deux réels positifs. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta < n\alpha$.*

(Il suffit de voir que le réel $x = \frac{\alpha}{\beta}$ est majoré par un entier). Notons que pour le même entier n on a aussi $\frac{1}{n}\beta < \alpha$.

On dit que $\mathbb{R}$ est *archimédien.*

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il résulte de la propriété précédente qu'entre deux réels il y a une infinité de rationnels et d'irrationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$. On montre d'abord qu'il y a au moins un rationnel.

LEMME 14. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, alors $\exists \gamma \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha < \gamma < \beta$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on trouve un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(\beta - \alpha) > 1$. Alors il existe un entier m tel que

$$n\alpha < m < n\beta. \tag{II.4.1}$$

Si $n\beta$ n'est pas entier, on peut en effet prendre pour m la partie entière $[n\beta]$, sinon, on peut prendre $m = n\beta - 1$. Divisant par n les inégalité (II.4.1) et posant $\gamma = \frac{m}{n}$, on voit qu'on a

$$\alpha < \gamma < \beta.$$

□

THÉORÈME 15. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, alors il existe une infinité de rationnels et d'irrationnels dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.*

DÉMONSTRATION. Entre α et β il y a un rationnel γ_1, entre γ_1 et β il y en a un autre γ_2, entre γ_2 et β il y en a encore un autre γ_3, ainsi de suite. On peut ainsi obtenir une infinité de rationnels dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

Pour n assez grand, on a

$$\alpha < \gamma < \gamma + \frac{\sqrt{2}}{n} < \beta.$$

Or $\gamma + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. Entre α et β il y a donc un irrationnel δ_1, entre δ_1 et β il y en a un autre δ_2, ainsi de suite. On peut donc aussi obtenir une infinité d'irrationnels dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$. □

II.5. Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques, partout définies sur les réels, sont les trois fonctions suivantes :

- *sinus hyperbolique* : $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- *cosinus hyperbolique* : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- *tangente hyperbolique* : $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Le sinus et la tangente hyperbolique sont des *fonctions impaires* (pour tout x, on a $f(-x) = -f(x)$), le cosinus hyperbolique est une *fonction paire* ($f(-x) = f(x)$).

On établit aisément la formule

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = -1.$$

Dérivées. On a facilement

- $\sinh'(x) = \cosh$
- $\cosh'(x) = \sinh$
- $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

Fonctions réciproques.

Les fonctions réciproques sont les suivantes

- *argument sinus hyperbolique* : $\arg\sinh$.
  Cette fonction est partout définie :
  $$\forall y \in \mathbb{R}, \arg\sinh(y) = x \iff y = \sinh(x).$$
- *argument cosinus hyperbolique* : $\arg\cosh$.
  Cette fonction est définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$:
  $$\forall y \in \mathbb{R}, y \geq 1, \arg\cosh(y) = x \iff x \geq 0, \text{ et } y = \cosh(x).$$
- *argument tangente hyperbolique* : $\arg\tanh$.
  Cette fonction est définie sur l'intervalle $]-1, +1[$:
  $$\forall y \in \mathbb{R}, -1 < y < 1, \arg\tanh(y) = x \iff y = \tanh(x).$$

REMARQUE 16. Si $y = \cosh(x)$, alors on a aussi $y = \cosh(-x)$, c'est pourquoi il faut choisir la valeur de x pour $\arg\cosh(y)$. (Ceci n'est pas nécessaire pour le sinus et la tangente hyperboliques, car ces fonctions sont injectives). La fonction cosh restreinte à l'intervalle $[0, +\infty[$ est une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction $\arg\cosh$ est la bijection réciproque.