CHAPITRE III

# Suites numériques

## III.1. Définitions

Définition III.1. Une *suite* $(u_n)$ *de réels* est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ où on note $u_n$, de préférence à $u(n)$, l'image de $n \in \mathbb{N}$ par cette application. On dit aussi que $(u_n)$ est une *suite numérique*.

Par exemple la suite des entiers naturels est la suite numérique telle que $u_n = n$.

On peut se donner une suite de diverses manières :

- Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction, sa restriction aux entiers définit une suite. Par exemple la fonction $f(x) = x^2 + 1$ définit la suite $(u_n)$ où $u_n = n^2 + 1$.
- On peut procéder par récurrence : on donne $u_0$ ainsi qu'une formule qui donne la valeur de $u_{n+1}$ en fonction de celle de $u_n$. Par exemple, si on pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1$, on retrouve la suite des entiers naturels.
- On peut procéder par double récurrence : on donne $u_0$ et $u_1$ ainsi qu'une formule qui donne la valeur de $u_{n+2}$ en fonction de celle de $u_n$ et $u_{n+1}$. Par exemple, on pose $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. C'est la fameuse *suite de Fibonacci*, dont on donne ci-dessous les premiers termes :
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Remarques III.2. 1) On pourrait encore imaginer une triple récurrence, et plus largement, envisager n'importe quel procédé qui permette de définir une application des entiers dans les réels.

2) On peut aussi considérer des suites $(u_n)$ indexées à partir d'un entier $k$ (l'application $u$ n'est définie que sur les entiers $n \geq k$). On note $(u_n)_{n\geq k}$ lorsqu'on veut indiquer à partir de quel entier on indexe la suite. Par exemple on peut considérer la suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ (qui n'est définie que pour $n \geq 1$).

3) On peut aussi considérer des suites de complexes, définies par une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$. Pour tout $n$, on a alors $u_n \in \mathbb{C}$. Une suite de réels n'est jamais qu'une suite de complexes particulière.

DÉFINITIONS III.3. Soit $(u_n)$ une suite de réels.

- On dit que la suite $(u_n)$ est *monotone croissante* (resp. *monotone décroissante*) si il existe un entier $N$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).
- On dit que la suite $(u_n)$ est *stationnaire* si il existe un entier $N$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_{n+1} = u_n$.
- On dit que la suite $(u_n)$ est *majorée* (resp. *minorée*) si il existe un entier $N$ et un nombre réel $A$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leq A$ (resp. un nombre réel $B$ tel que $u_n \geq B$). On dit que la suite est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

REMARQUES III.4. 1) Seul le comportement asymptotique nous intéresse, c'est pourquoi on considère chaque propriété *pour n grand* (c'est à dire pour $n$ supérieur à un certain entier $N$).

2) On peut aussi parler de suite *strictement monotone* : si, pour $n$ grand, on a $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$), on dit que la suite est *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*).

3) Il n'y a pas d'ordre naturel sur les complexes et la notion de suite monotone complexe n'a donc aucun sens. En revanche, on peut parler de *suite complexe stationnaire* (avec la même définition que pour les suites réelles) ainsi que de *suite complexe bornée* : on dit qu'une suite complexe $(u_n)$ est bornée, s'il existe un entier $N$ et un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n| \leq M$.

**Suite extraite.**

DÉFINITION III.5. Soit $(u_n)$ la suite numérique définie par l'application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une application (des entiers sur les entiers) <u>strictement croissante</u>. La suite $(v_n)$ définie par l'application $v = u \circ \varphi$ est appelée *suite extraite* de $(u_n)$.

La suite extraite $(v_n)$ est donc telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

EXEMPLES III.6. 1) Soit $k > 0$ un entier et $\varphi$ l'application telle que $\varphi(n) = n + k$. La suite extraite est alors la suite $(v_n)$ telle que $v_n = u_{n+k}$ (obtenue en ignorant les $k$ premiers termes et en décalant les autres termes de la suite).
2) Soit $\varphi$ l'application telle que $\varphi(n) = 2n$. La suite extraite est alors la suite $(v_n)$ telle que $v_n = u_{2n}$ (obtenue en ne gardant que les termes d'indice pair).
3) Soit $\varphi$ l'application telle que $\varphi(n) = n^2$. La suite extraite est alors la suite $(v_n)$ telle que $v_n = u_{n^2}$ dont les premiers termes sont

$$u_0, u_1, u_4, u_9, u_{16}, u_{25}, \ldots.$$

## III.2. Convergence

DÉFINITION III.7. On dit qu'une suite $(u_n)$ *converge vers* $a \in \mathbb{R}$, on note $\lim_{n\to\infty}(u_n) = a$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

On dit aussi que $a$ est *la limite de la suite* $(u_n)$. Si la suite a une limite, on dit qu'elle est *convergente*, sinon on dit qu'elle est *divergente*.

On peut aussi dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$$

pour $n$ grand (c'est à dire supérieur à un entier $N$). Soulignons que $N$ dépend du réel $\varepsilon$ (on pourrait le noter $N_\varepsilon$ pour bien insister sur ce point).

EXEMPLES III.8. 1) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est convergente de limite 0.

2) Une suite stationnaire est convergente de limite la valeur commune des termes $u_n$ (valeur commune pour $n$ grand).

On dit *la* limite, car celle ci est unique :

PROPOSITION III.9. *Une suite $(u_n)$ a au plus une limite.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde qu'il y a deux limites $a < b$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon \leq b - \varepsilon$ (par exemple $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$). Alors, pour $n$ grand, on a

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \leq b - \varepsilon < u_n < b + \varepsilon.$$

On aboutit à une contradiction ! □

On ne change pas la limite d'une suite en négligeant un nombre fini de termes. Plus généralement, on a le résultat suivant.

THÉORÈME III.10. *Si une suite $(u_n)$ est convergente et de limite $a$, alors toute suite extraite de la suite $(u_n)$ est convergente et de limite $a$.*

DÉMONSTRATION. Si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n$. On peut s'en convaincre par récurrence : pour $n = 0$, on a $\varphi(0) \geq 0$, et si c'est vrai pour $n$, alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n+1) \geq n + 1$.

Pour la suite $(u_n)$ on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Comme $\varphi(n) \geq n$, $n \geq N \Rightarrow \varphi(n) \geq N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$.

Pour la suite extraite $(v_n)$ définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$, on a donc aussi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n - a| < \varepsilon.$$

□

Remarque III.11. Inversement, il se peut que la suite $(u_n)$ diverge mais qu'une suite extraite converge. Par exemple si $u_n = (-1)^n$, la suite $(u_n)$ diverge mais la suite extraite en ne retenant que les termes d'indice pair converge vers 1 (elle est stationnaire, de valeur 1), la suite extraite en ne retenant que les termes d'indice impair converge vers -1.

Théorème III.12. *Si une suite est convergente, alors elle est bornée.*

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = a$ : Il existe $N$ tel que,

$$n \geq N \Longrightarrow a-1 < u_n < a+1.$$

Posons $A = \max\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, a+1\}, B = \min\{u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, a-1\}$. Alors, pour tout $n$, on a

$$B \leq u_n \leq A.$$

□

Remarque III.13. Il ne suffit pas qu'une suite soit bornée pour être convergente : la suite $u_n = (-1)^n$ évoquée plus haut est divergente, cependant elle est bornée.

## III.3. Somme, produit, inégalités

A partir de deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$, on peut former la *suite somme* $(u_n + v_n)$ et la *suite produit* $(u_n v_n)$.

Proposition III.14. *Si les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont convergentes, avec $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = b$, alors les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont convergentes et on a*

- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = a + b$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = ab$.

On retiendra que *la limite de la somme est la somme des limites* et que *la limite du produit est le produit des limites.*

Démonstration. Laissons la somme en exercice. Pour le produit on écrit :

$$u_n v_n - ab = u_n v_n - u_n b + u_n b - ab.$$

On note que la suite $(u_n)$ est bornée, puisqu'elle est convergente [Théorème III.12] : il existe $A$ tel que $\forall n, u_n \leq A$ (et on peut toujours supposer $A > 0$). On a donc

$$|u_n v_n - ab| \leq A|v_n - b| + |u_n - a||b|.$$

Pour $n$ grand, $|v_n - b|$ et $|u_n - a|$ sont petits :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{A + |b|},$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{A + |b|}.$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors

$$n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - ab| < \frac{A\varepsilon}{A+|b|} + \frac{|b|\varepsilon}{A+|b|} = \varepsilon.$$

□

De même on peut considérer la suite $(\alpha u_n)$ (où $\alpha$ est une constante), la *suite différence* $(u_n - v_n)$ et la suite quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ (si $v_n \neq 0$).

Corollaire III.15. *Si* $\lim_{n\to\infty}(u_n) = a$ *et* $\lim_{n\to\infty}(v_n) = b$, *alors*

- $\lim_{n\to\infty}(\alpha u_n) = \alpha a$,
- $\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = a - b$,
- *et si* $b \neq 0$, $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$.

**Inégalités.**

Proposition III.16. *Si les suites* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *sont convergentes, avec* $\lim_{n\to\infty}(u_n) = a$ *et* $\lim_{n\to\infty}(v_n) = b$, *et si* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang,alors* $a \leq b$.

On retiendra que *la limite respecte les inégalités.*

Remarques III.17. 1) On ne change pas la nature ni la limite d'une suite en négligeant un nombre fini de termes, il n'est donc pas nécessaire de supposer l'inégalité pour tout $n$, mais seulement *pour $n$ grand.*

2) On peut avoir l'inégalité stricte $u_n < v_n$ pour $n$ grand mais seulement l'inégalité large $a \leq b$. C'est le cas des suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ du chapitre précédent qui convergent toutes deux vers $\sqrt{2}$.

On a aussi le *théorème des gendarmes* :

Théorème III.18. *Si deux suites* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *sont convergentes, de même limite a, et si la suite* $(w_n)$ *est telle que* $u_n \leq w_n \leq v_n$ *pour n grand, alors la suite* $(w_n)$ *converge aussi vers cette limite a.*

Démonstration.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N \Rightarrow a - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < a + \varepsilon.$$

□

## III.4. Limites infinies

Définition III.19. On dit qu'une suite $(u_n)$ *tend vers l'infini*, on note $\lim_{n\to\infty}(u_n) = \infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

De même, $(u_n)$ *tend vers moins l'infini*, on note $\lim_{n\to\infty}(u_n) = -\infty$, si

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq B.$$

Dans un cas comme dans l'autre, la suite $(u_n)$ n'est pas bornée et n'est donc pas convergente.

**Opérations sur les limites.**

Si les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ tendent toutes deux vers l'infini, il est facile de voir qu'il en est de même de la somme $(u_n + v_n)$. On peut résumer ceci par la règle "$\infty + \infty = \infty$." On peut ainsi dresser un tableau d'opérations sur les limites :

PROPOSITION III.20. (1) $\infty + \infty = \infty$.

(2) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

(3) $\forall a \in \mathbb{R}, a + \infty = \infty$.

(4) $\forall a \in \mathbb{R}, a + (-\infty) = -\infty$.

(5) $\infty\infty = \infty$.

(6) $(-\infty)(-\infty) = \infty$.

(7) $(-\infty)\infty = -\infty$.

(8) $\forall a \neq 0, a\infty = \pm\infty$ (*en respectant la règle des signes*).

(9) $\forall a \neq 0, \frac{a}{\infty} = 0$.

Par exemple (8) veut dire que si on a $\lim_{n\to\infty}(u_n) = a > 0$ et $\lim_{n\to\infty}(v_n) = -\infty$, alors $\lim_{n\to\infty}(u_n v_n) = -\infty$.

**Formes indéterminées.** Si $\lim_{n\to\infty}(u_n) = -\infty$ et $\lim_{n\to\infty}(v_n) = \infty$, on ne peut rien conclure a priori pour la suite somme $(u_n + v_n)$. Supposons par exemple que $u_n = -n$ et envisageons quatre possibilités pour $v_n$ :

(1) $v_n = a + n$. Alors $u_n + v_n = a$, donc $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = a$,

(2) $v_n = n^2$. Alors $u_n + v_n = n^2 - n$, donc $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \infty$,

(3) $v_n = \frac{n}{2}$. Alors $u_n + v_n = -\frac{n}{2}$, donc $\lim_{n\to\infty}(u_n + v_n) = -\infty$,

(4) $v_n = (-1)^n + n$. Alors $u_n + v_n = (-1)^n$, donc $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.

On voit que tout est possible pour la suite somme. On dit que "$(-\infty) + \infty$" est une *forme indéterminée*. On peut donner d'autres exemples :

$$\bullet\ (-\infty) + \infty, \quad \bullet\ 0\infty, \quad \bullet\ \frac{0}{0}, \quad \bullet\ \frac{\infty}{\infty}.$$

## III.5. Borne supérieure, borne inférieure

### Majorant, minorant, maximum, minimum.

DÉFINITION III.21. Soit $E$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$ une partie de $E$.

(1) On dit qu'un élément $a \in E$ est un *majorant* de $A$ si

$$\forall x \in A, x \leq a.$$

(2) On dit que $a \in E$ est un *minorant* si

$$\forall x \in A, x \geq a.$$

Si une partie $A$ admet un majorant (resp. un *minorant*) on dit qu'elle est majorée (resp. *minorée*).

Une partie peut n'admettre aucun majorant, par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$. Elle peut en admettre plusieurs, par exemple les entiers positifs sont tous des majorants de la partie formée par les entiers négatifs dans $\mathbb{R}$.

Un majorant est un éléments de $E$, il n'appartient pas nécessairement à $A$, en fait au plus un majorant peut appartenir à $A$ : si $a, b \in A$ sont deux majorants, alors $a \leq b$ (car $b$ est un majorant et $a \in A$) et $b \leq a$ (car $a$ est un majorant et $b \in A$) donc $a = b$. Si $a \in A$ est (l'unique) majorant de $A$, on dit que c'est *le plus grand élément de* $A$ ou le *maximum* de $A$.

Une partie peut être majorée et cependant ne pas admettre de plus grand élément, par exemple l'intervalle ouvert $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est majoré et n'admet pas de maximum.

Tout ce qui est plus haut vaut évidemment pour les minorants et *le plus petit élément* ou *minimum* (éventuel) de $A$.

### Élément maximal, élément minimal.

DÉFINITION III.22. Soit $E$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$ une partie de $E$.

(1) On dit qu'un élément $a \in A$ est un *élément maximal* de $A$ si

$$x \in A, x \geq a \Rightarrow x = a.$$

(2) On dit qu'un élément $a \in A$ est un *élément minimal* de $A$ si

$$x \in A, x \leq a \Rightarrow x = a.$$

Cette fois il s'agit d'éléments de $A$. Pour résumer,
- un majorant est un élément **de $E$** qui dépasse **tous** les éléments de $A$,
- un élément maximal est un élément **de $A$** qui n'est dépassé **par aucun** élément de $A$.

Une partie $A$ peut n'admettre aucun élément maximal : c'est le cas de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$. Elle peut en admettre plusieurs et tout ceci vaut aussi pour les élément minimaux. Donnons l'exemple d'une partie avec plusieurs éléments minimaux.

Exemple III.23. Soit $E = \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers. C'est un ensemble ordonné par la relation de divisibilité : on pose $x \preceq y$ si $x$ divise $y$. Soit $A$ la partie formée par tous les entiers dont on exclut 0 et 1. Les éléments minimaux de $A$ sont alors les nombres premiers. En effet, si $p$ est premier il n'est divisible que par 1 et par lui-même, or $1 \notin A$ :

$$x \in A \text{ et } x \preceq p \Rightarrow x = p.$$

On a cependant les propriétés suivantes.

Proposition III.24. *Soit $E$ un ensemble ordonné, $A \subseteq E$ une partie de $E$ et $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *$a$ est à la fois un élément maximal et un majorant de $A$,*

(2) *$a$ est un majorant de $A$ et $a \in A$,*

(3) *$a$ est le maximum de $A$.*

*Dans ces conditions $a$ est l'unique élément maximal de $A$.*

Démonstration. On raisonne par implications circulaires :
(1) $\Rightarrow$ (2) Si $a$ un élément maximal de $A$, alors $a \in A$ par définition.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si $a$ est un majorant et $a \in A$, on a dit plus haut qu'alors $a$ est le maximum de $A$.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si $a$ est le maximum, c'est un majorant et $\forall b \in A, b \neq a$ on a $b < a$. Donc $a$ est un élément maximal et $b$ ne l'est pas. On a bien l'implication voulue et on voit qu'en outre $a$ est l'unique élément maximal. $\square$

Corollaire III.25. *Si $E$ est totalement ordonné et si $A$ admet un élément maximal, alors il est unique et c'est le maximum de $A$.*

Démonstration. Si $A$ admet un élément maximal $a$, alors pour tout $b \in A$, $b$ se compare à $a$, donc $b \leq a$ (puisque $a$ est maximal). $\square$

**Borne supérieure, borne inférieure.**

Définition III.26. Soit $E$ un ensemble ordonné et $A \subseteq E$ une partie de $E$.

(1) On dit qu'un élément $a \in E$ est la *borne supérieure* de $A$ si c'est le plus petit des majorants de $A$. On note alors $a = \mathrm{Sup}(A)$.

(2) On dit qu'un élément $a \in E$ est la *borne inférieure* de $A$ si c'est le plus grand des majorants de $A$. On note alors $a = \mathrm{Inf}(A)$.

La borne supérieure est le minimum de l'ensemble des majorants, si elle existe elle est donc unique.

La borne supérieure est un élément de $E$, elle n'est pas nécessairement dans $A$. D'ailleurs, on a la proposition suivante.

PROPOSITION III.27. *Soit $E$ un ensemble ordonné, $A \subseteq E$ une partie de $E$ et $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) $a = \sup(A)$ *et* $a \in A$.

(2) $a$ *est le maximum de* $A$.

DÉMONSTRATION. La borne supérieure est un majorant et on a déjà vu que si un majorant est dans $A$ alors c'est le maximum. Réciproquement, le maximum $m$ est un majorant, et si $a$ est un autre majorant $a$, on a $m \leq a$, puisque $m \in A$. □

Pour que $A$ admette une borne supérieure, il est évidemment nécessaire qu'il existe des majorants ! Pour $\mathbb{R}$ la condition est suffisante :

THÉORÈME III.28. *Toute partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).*

On admet ce résultat. On peut maintenant caractériser la borne supérieure.

THÉORÈME III.29. *Soit $A$ une partie majorée de $\mathbb{R}$ et $M$ un réel. Alors $M = \mathrm{Sup}(A)$ si et seulement si on a les deux conditions suivantes.*

(1) $\forall x \in A, x \leq M$,

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$.

DÉMONSTRATION. La première condition exprime que $M$ est un majorant, la seconde que tout réel plus petit que $M$ n'est pas un majorant. Donc les deux conditions réunies expriment que $M$ est le plus petit des majorants. □

On laisse en exercice la caractérisation analogue de la borne inférieure.

**Suite monotone bornée, suites adjacentes.**

THÉORÈME III.30. *Soit $(u_n)$ une suite croissante (resp. décroissante) de $\mathbb{R}$. Alors la suite $(u_n)$ converge si et seulement si elle est majorée (resp. minorée). Dans ce cas elle converge vers la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de la partie $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ formée par les éléments de la suite.*

DÉMONSTRATION. Si une suite converge, alors elle est bornée [Théorème III.12], la condition est donc nécessaire. Inversement si une suite croissante est majorée, soit $M = \sup(A)$. Il résulte de la caractérisation de la borne supérieure [Théorème III.29] qu'on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, M - \varepsilon < u_{n_0} \leq M.$$

Comme la suite est croissante et que $M$ majore tous les termes de la suite, on tire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow M - \varepsilon < u_n \leq M.$$

Ainsi la suite converge vers $M$. On raisonne de manière identique pour une suite décroissante minorée. □

Corollaire III.31. *Soit* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *deux suites telles que*

(1) $(u_n)$ *est croissante,* $(v_n)$ *est décroissante* (*à partir d'un certain rang*),

(2) $u_n \leq v_n$ (*pour* $n$ *grand*),

(3) *la différence* $u_n - v_n$ *tend vers* 0.

*Alors les suites* $(u_n)$ *et* $(v_n)$ *sont convergentes et ont même limite.*

Définition III.32. Dans les conditions du corollaire on dit que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont *adjacentes.*

C'est le cas des suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ du chapitre précédent qui convergent toutes deux vers $\sqrt{2}$.

## III.6. Suite de cauchy

Si une suite $(u_n)$ est convergente, il est clair que la différence $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Cependant cette condition n'est pas suffisante. On donne un exemple.

Exemple III.33. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$, il est donc clair que cette différence tend vers 0. Cependant on a

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots + \frac{1}{2n}$$

et chaque terme de la somme est minoré par le dernier, donc

$$u_{2n} - u_n \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite n'est donc pas majorée, en effet elle est croissante, et si $u_n$ atteint la valeur $A$ alors $u_{2n}$ atteint une valeur supérieure à $A + \frac{1}{2}$. Donc $(u_n)$ ne converge pas.

Une condition nécessaire et suffisante est donnée par les suites de Cauchy.

Définition III.34. Soit $(u_n)$ une suite (de réels ou de complexes). On dit que la suite $(u_n)$ est une *suite de Cauchy* si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, m, n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Théorème III.35. *Soit* $(u_n)$ *une suite* (*de réels ou de complexes*). *Alors* $(u_n)$ *est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

On admet que la condition est suffisante. C'est une propriété de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$), on dit que $\mathbb{R}$ est *complet.* On démontre qu'elle est nécessaire :

Démonstration. Si $(u_n)$ converge vers une limite $a$, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Choisissons l'entier $N$ correspondant à $\frac{\varepsilon}{2}$,

– pour $n \geq N$, on a $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$,
– pour $m \geq N$, on a $|u_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$,

Donc pour $m, n \geq N \Rightarrow$ on a

$$|u_m - u_n| \leq |u_n - a| + |u_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Notons qu'une suite de Cauchy dont les termes sont des rationnels ne converge pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$, autrement dit $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet les suites $(\alpha_n)$ et $(\beta_n)$ du chapitre précédent convergent vers $\sqrt{2}$. Ce sont des suites de rationnels, donc de réels, convergentes dans $\mathbb{R}$, donc de Cauchy. La limite est dans $\mathbb{R}$ (qui est complet), elle n'est pas dans $\mathbb{Q}$ (qui ne l'est pas).