CHAPITRE IV

Dérivation (plan du cours)

IV.1. Limite d'une fonction

– Limite, limite à droite, à gauche.

– Unicité de la limite.

– Somme et produit de limites.

– Inégalités.

– Limite de fonctions composées.

IV.2. Dérivée

– Fonction dérivable, différentielle.

– Dérivée et continuité.

– Dérivée de la somme, du produit, du quotient.

– Dérivée de fonctions composées.

– Limite de fonctions composées.

IV.3. Fonction dérivée, dérivées successives

– Fonction dérivée.

– Dérivée seconde, dérivées successives.

– Formule de Leibniz.

CHAPITRE V

Continuité (plan du cours)

V.1. Algèbre des fonctions continues

– Somme et produit de fonctions continues.

– Continuité uniforme.

V.2. Continuité et suites

Théorème V.1. *f est continue en a, si et seulement si, pour toute suite (a_n) qui tend vers a, la suite (b_n) telle que $b_n = f(a_n)$ tend vers $b = f(a)$.*

Théorème V.2 (Bolzano Weierstrass). *De toute suite de réels dans un intervalle fermé borné on peut extraire une sous suite convergente.*

V.3. Fonctions continues sur un intervalle

Théorème V.3 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Si β est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \beta$.*

Théorème V.4 (Théorème des extrema). *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors f est bornée sur cet intervalle et les bornes sont atteintes : Si M et m désignent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure des valeurs prises, alors il existe c_1 et c_2 dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c_1) = M, f(c_2) = m$.*

Corollaire V.5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors l'image $f(I)$ de I est un intervalle.*

V.4. Fonctions continues monotones, fonctions réciproques

Lemme V.6. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème V.7. *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$. La bijection réciproque f^{-1} est continue strictement monotone (de même sens de variation que f) sur J.*

Dérivée de la fonction réciproque.

Si f est bijective et dérivable et $f(x) = y$, la dérivée de la bijection réciproque f^{-1} en y est donnée par la formule

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Tableau des dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arg\sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arg\cosh'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\arg\tanh'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

De la dernière, on tire

$$\arg\tanh(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

V.5. Théorème des accroissements finis

THÉORÈME V.8 (Théorème de Rolle). *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dérivable dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe c tel que $a < c < b$ et $f'(c) = 0$.*

COROLLAIRE V.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et dérivable dans l'intervalle ouvert $]a, b[$. Alors il existe c tel que $a < c < b$ et $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

THÉORÈME V.10 (Théorème des accroissements finis). *Soit f une fonction dérivable dans un intervalle I. Si la dérivée est bornée sur I, soit $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$, alors, pour tout couple de points (x, y) de I on a*

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|.$$