ANALYSE, Notes de cours M1

Paul-Jean CAHEN

Université Paul Cézanne, Aix-Marseille III

Table des matières

CHAPITRE I

Logique et ensembles

I.1. Logique

– Tableaux de vérité.
– Implication, équivalence.
– ET & OU.
– Négation :

$$\text{Non[A OU B]} \Longleftrightarrow \text{Non[A] ET Non[B]}.$$
$$\text{Non[A ET B]} \Longleftrightarrow \text{Non[A] OU Non[B]}.$$

– Raisonnement par récurrence.
– Raisonnement par l'absurde :

$$[A \Rightarrow B] \Longleftrightarrow \big[NON[B] \Rightarrow NON[A]\big].$$

Tableau résumé.

A	B	NON[A]	NON[B]	A ET B	A OU B	A ⇒ B	B ⇒ A	A ⇔ B
V	V	F	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	F	F	V	V	V

I.2. Parties d'une ensemble

Appartenance, inclusion.

Une partie A d'un ensemble E est définie par la relation d'appartenance :

$$x \in A.$$

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Il y a une relation d'inclusion entre les parties de E (qu'on peut considérer comme une *relation d'ordre* sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$) :

$$A \subseteq B \Longleftrightarrow [x \in A \Rightarrow x \in B]$$

Remarque I.1. C'est l'inclusion *au sens large* : on n'exclut pas $A = B$. D'ailleurs on a

$$[A \subseteq B] \text{ ET } [B \subseteq A] \Longleftrightarrow A = B.$$

Si A est contenue dans B et $A \neq B$, on a l'inclusion *au sens strict* : $A \subsetneqq B$).

La partie $\emptyset$ (telle que $\forall x, x \notin \emptyset$) est la plus petite de toutes les parties, la partie E (telle que $\forall x, x \in E$) est la plus grande de toutes.

Union, intersection, complémentaire.

– *Union* d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E :

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$

– *Intersection* d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties d'un ensemble E :

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$

– *Complémentaire* d'une partie A de E :

$$\complement A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Proposition I.2. *On a :*
- $\complement\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} \complement A_i$
- $\complement\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} \complement A_i$

I.3. Applications

Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F fait correspondre à tout $x \in E$ un et un seul élément $y = f(x)$ de F (y est l'image de x par f). On note

$$f : E \mapsto F.$$

Exemple : l'*application identique* $id_E : E \mapsto E$ qui à tout $x \in E$ associe x, soit $id_E(x) = x$.

Définition I.3. Soit $f : E \mapsto F$.
- On dit que f est *injective* ou que f est une *injection* si

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

- On dit que f est *surjective* ou que f est une *surjection* si

$$\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y.$$

- On dit que f est *bijective* ou que f est une *bijection* si elle est à la fois injective et surjective.

Application réciproque.

Si $f : E \mapsto F$ est bijective, à tout $y \in F$ correspond un élément et un seul $x \in E$ tel que $f(x) = y$. On définit ainsi une application de F dans E. C'est l'*application réciproque de* f. On la note f^{-1}. On a

$$y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Ainsi f et f^{-1} sont réciproques l'une de l'autre : $(f^{-1})^{-1} = f$.

Application composée.

Soient $f : E \mapsto F$, et $g : F \mapsto G$, deux applications (l'ensemble d'arrivée de la première est l'ensemble de départ de la seconde). On appelle *application composée* de f et de g on note $g \circ f$, l'application $g \circ f : E \mapsto G$, telle que

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

PROPOSITION I.4. *Soit $f : E \mapsto F$ une application bijective. Alors f et la bijection réciproque f^{-1} sont liées par les relations*

$$f \circ f^{-1} = id_F, \quad f^{-1} \circ f = id_E.$$

Image directe.

DÉFINITION I.5. Soient $f : E \mapsto F$ une application et A une partie de E. On appelle *image directe de A par f*, on note $f(A)$, la partie de F définie par

$$f(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, f(x) = y\}.$$

REMARQUE I.6. Ainsi f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

PROPOSITION I.7. *Soit $f : E \mapsto F$ une application.*
- *Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subseteq B$, alors $f(A) \subseteq f(B)$.*
- *Soit $(A_i)_{i\in I}$ famille de parties de E, alors*
  - $f\big(\bigcup_{i\in I} A_i\big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$,
  - $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) \subseteq \bigcap_{i\in I} f(A_i)$,

REMARQUE I.8. On a l'égalité $f\big(\bigcap_{i\in I} A_i\big) = \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ si et seulement si f est injective.

CHAPITRE II

Rationnels et réels

II.1. Nombres irrationnels

Rappelons qu'on a
- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels,
- $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs,
- $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

Avec
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Cependant, les rationnels (positifs) ne suffisent pas à mesurer toute longueur. Par exemple, si un carré est de côté 1, donc de surface 1, le carré construit sur sa diagonale est de surface 2 (on peut évoquer le théorème de Pythagore : le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des deux côtés). On peut donc dire que la diagonale est de longueur $\sqrt{2}$. Or il n'y a pas de nombre rationnel dont le carré soit 2. La preuve suivante se trouve chez Aristote :

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\frac{p}{q}$ soit tel que

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \tag{II.1.1}$$

On peut toujours supposer que $\frac{p}{q}$ est sous forme irréductible (p et q n'ont pas de facteur commun). De (II.1.1) on tire $p^2 = 2q^2$. Ainsi p^2 est pair, donc p est pair : on peut écrire $p = 2a$, où a est un entier. On tire $4a^2 = 2q^2$ donc $2a^2 = q^2$. Mais alors q est pair. Contradiction : la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas sous forme irréductible (p et q sont pairs). $\square$

On dit que $\sqrt{2}$ est un *irrationnel*. On montre de même que $\sqrt{n}$ est irrationnel pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un carré parfait (c'est à dire le carré d'un entier). Cependant $\sqrt{2}$ peut être arbitrairement approché par un rationnel, c'est ce qu'on expose ensuite.

Moyenne arithmétique, moyenne géométrique. Rappelons la formule suivante (pour deux nombres α, β, rationnels, réels ou complexes)

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \alpha\beta.$$

Il en résulte, pour $\alpha, \beta > 0$, qu'on a

$$\sqrt{\alpha\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$$

et en fait, avec inégalité stricte sauf si (et seulement si) $\alpha = \beta$. Autrement dit, la *moyenne arithmétique* est supérieure à la *moyenne géométrique*.

Approximations de $\sqrt{2}$. Posons $\alpha_0 = 1$ et $\beta_0 = 2$ (ainsi $\alpha_0\beta_0 = 2$) puis par récurrence,

$$\beta_n = \frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}}{2}, \quad \alpha_n = \frac{2}{\beta_n}$$

(on a donc $\alpha_n\beta_n = 2$ pour tout n). Ainsi

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = 1, & \beta_0 = 2, \\ \alpha_1 = \frac{4}{3}, & \beta_1 = \frac{3}{2}, \\ \alpha_2 = \frac{24}{17}, & \beta_2 = \frac{17}{12}, \\ \dots & \dots \end{array}$$

Ainsi de suite. On voit qu'on a les inégalités

$$\alpha_{n-1} < \alpha_n < \sqrt{2} < \beta_n < \beta_{n-1}.$$

En effet, β_n est la moyenne arithmétique du couple précédent, et $\sqrt{2}$ la moyenne géométrique, donc $\alpha_{n-1} < \sqrt{2} < \beta_n < \beta_{n-1}$, et la place de α_n se déduit de la relation $\alpha_n\beta_n = 2$ pour tout n. Ainsi les suites (α_n) et (β_n) encadrent $\sqrt{2}$. Par ailleurs la différence $\Delta_n = \beta_n - \alpha_n$ décroît très vite. En effet on a

$$\Delta_2 = \frac{17}{12} - \frac{24}{17} = \frac{17^2 - 12.24}{12.17} = \frac{1}{204} < 5.10^{-3}.$$

Et on peut calculer Δ_n à partir de Δ_{n-1} :

$$\Delta_n = \beta_n - \frac{2}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}}{2} - \frac{4}{\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}} = \frac{\left(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\right)^2 - 8}{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}.$$

Or $\alpha_{n-1}\beta_{n-1} = 2$, donc $\left(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}\right)^2 - 8 = \left(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}\right)^2$. Ainsi

$$\Delta_n = \frac{\Delta_{n-1}^2}{2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1})}.$$

Or $2(\alpha_{n-1}+\beta_{n-1}) = 4\beta_n > 4\sqrt{2} > 5$. On tire $\Delta_n < \frac{\Delta_{n-1}^2}{5}$. Ainsi on a

$$\begin{array}{l} \Delta_3 < \frac{\left(5.10^{-3}\right)^2}{5} = 5.10^{-6}, \\ \Delta_4 < \frac{\left(5.10^{-6}\right)^2}{5} = 5.10^{-12}, \\ \dots \end{array}$$

II.2. Corps commutatif

On admet donc l'existence de l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ contenant strictement l'ensemble des rationnels (ainsi que l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes). En résumé on a les inclusions

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

L'ensemble des réels est muni d'une *somme* et d'un *produit.*

La somme. On note $x + y$ la somme de x et de y. La somme est

- *associative* :

$$\forall x, y, z,\ (x + y) + z = x + (y + z)$$

- *commutative* :

$$\forall x, y,\ x + y = y + x$$

- 0 est *élément neutre* de la somme :

$$\forall x,\ 0 + x = x + 0 = x$$

- tout $x \in \mathbb{R}$ admet un *opposé* (noté $-x$) :

$$x + (-x) = 0.$$

On note $x - y$ pour $x + (-y)$, on dit que c'est la *différence* de x et de y.

Le produit. On note xy le produit de x et de y. Le produit est

- *associatif* :

$$\forall x, y, z,\ (xy)z = x(yz)$$

- *commutatif* :

$$\forall x, y,\ xy = yx$$

- *distributif par rapport à la somme* :

$$\forall x, y, z,\ x(y + z) = xy + xz \quad \text{et} \quad (y + z)x = yx + zx$$

- 1 est *élément neutre* du produit :

$$\forall x,\ 1x = x1 = x$$

- tout $x \neq 0$ admet un *inverse* (noté x^{-1}) :

$$xx^{-1} = 1.$$

On dit que $\mathbb{R}$ est un *corps commutatif* (car le produit est commutatif).

Remarques II.1. (1) L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels et l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes sont aussi des corps commutatifs (la somme et le produit qui y sont définis jouissent des mêmes propriétés).

(2) L'élément 0 qui est neutre pour la somme est *absorbant* pour le produit : $\forall x,\ 0x = x$. Cela peut se *démontrer* à partir des règles de calcul précédentes. Il en résulte que 0 n'a pas d'inverse.

(3) On peut aussi démontrer la *règle des signes* : $\forall x, y$,
   - $(-x)y = x(-y) = -(xy)$.
   - $(-x)(-y) = xy$.

Rationnels et irrationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est une partie de $\mathbb{R}$ son complémentaire est formé des nombres dits *irrationnels.* L'opposé, l'inverse d'un rationnel est un rationnel, la somme, le produit de deux rationnels est un rationnel. Il en résulte que la somme et le produit d'un rationnel et d'un irrationnel est un irrationnel :

Proposition II.2. (1) $\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \alpha + \beta \in \mathbb{Q}, \alpha\beta \in \mathbb{Q}$.
(2) $\alpha \in \mathbb{Q}, \beta \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow \alpha + \beta \notin \mathbb{Q}, \alpha\beta \notin \mathbb{Q}$.

Remarque II.3. La somme et le produit de deux irrationnels peut aussi bien être un rationnel qu'un irrationnel. Par exemple :

$$\sqrt{2}\sqrt{2} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \quad (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) = 2 \in \mathbb{Q}.$$

II.3. Corps ordonné

On peut comparer deux réels : on écrit $x \leq y$ si x est *inférieur ou égal* à y. Cette relation est

- *reflexive* :

$$\forall x,\ x \leq x$$

- *antisymétrique* :

$$x \leq y \text{ et } y \leq x \Longleftrightarrow\ x = y$$

- *transitive* :

$$x \leq y \text{ et } y \leq z \Longrightarrow\ x \leq z$$

On dit que c'est une *relation d'ordre* et que $\mathbb{R}$ est un *ensemble ordonné.*

On a un autre exemple d'ensemble ordonné avec l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E. La relation d'inclusion $A \subseteq B$ est une relation d'ordre (elle est reflexive, antisymétrique et transitive). On note qu'il existe des parties incomparables ; par exemple, dans $\mathbb{N}$, la partie formée des nombres pairs ne se compare pas à celle formée des nombres impairs. On dit que l'ordre est *partiel.* En revanche, on, peut toujours comparer deux réels :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

On dit que l'ordre est *total* ou que $\mathbb{R}$ est *totalement ordonné.*
On note $x < y$ pour x *strictement inférieur* à y (soit $x \leq y$ *et* $x \neq y$).

L'ordre de $\mathbb{R}$ est *compatible* avec la structure de corps :

- Si $x \leq y$, alors, $\forall a, x + a \leq y + a$.
- Si $x \leq y$, alors, $\forall a \geq 0, ax \leq ay$.

On dit que $\mathbb{R}$ est un *corps ordonné.*

On peut en déduire d'autres propriétés, par exemple :

- $x \leq y \Longleftrightarrow -y \leq -x$
- Si $x \leq y$, alors, $\forall a \leq 0, ay \leq ax$.
- $0 < x \leq y \Longleftrightarrow 0 < y^{-1} \leq x^{-1}$.
- $\forall x, x^2 \geq 0$.

Remarque II.4. Le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels est aussi un corps ordonné (ce qui est vrai des réel l'est en particulier des rationnels). En revanche, il n'est pas possible de munir le corps $\mathbb{C}$ des complexes d'une relation d'ordre compatible avec la structure. En effet, on aurait $1 \geq 0$ (puisque 1 est un carré) donc $-1 \leq 0$, or -1 aussi est un carré.

Intervalles. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$.

- L'*intervalle fermé* $[\alpha, \beta]$ est l'ensemble
$$[\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x \leq \beta\}.$$
- L'*intervalle ouvert* $]\alpha, \beta[$ est l'ensemble
$$]\alpha, \beta[= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}.$$
- L'*intervalle semi ouvert* $[\alpha, \beta[$ est l'ensemble
$$[\alpha, \beta[= \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x < \beta\}.$$
- L'*intervalle semi ouvert* $]\alpha, \beta]$ est l'ensemble
$$]\alpha, \beta] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x \leq \beta\}.$$

On définit de même les intervalles $[\alpha, +\infty[,]\alpha, +\infty[,]-\infty, \alpha[,]-\infty, \alpha]$. Par exemple
$$[\alpha, +\infty] = \{x \in \mathbb{R} \mid \alpha \leq x\}.$$
Enfin, l'intervalle $]-\infty, +\infty[$ est l'ensemble $\mathbb{R}$ tout entier.

II.4. $\mathbb{R}$ est archimédien

Partie entière. L'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers *balise* l'ensemble des réels, c'est à dire que tout nombre réel est intercalé entre deux entiers :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } n \leq x < n+1.$$
Le plus grand entier n tel que $n \leq x$ s'appelle la *partie entière* de x, on le note $[x]$. On a donc
$$x = [x] + \epsilon, \text{ avec } 0 \leq \epsilon < 1.$$
Le *reste* ϵ est nul si et seulement si x est un entier.

On tire facilement le corollaire suivant.

Corollaire II.5. *Soient $\alpha > 0, \beta > 0$, deux réels positifs. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta < n\alpha$.*

(Il suffit de voir que le réel $x = \frac{\alpha}{\beta}$ est majoré par un entier). Notons que pour le même entier n on a aussi $\frac{1}{n}\beta < \alpha$.

On dit que $\mathbb{R}$ est *archimédien*.

$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il résulte de la propriété précédente qu'entre deux réels il y a une infinité de rationnels et d'irrationnels. On dit que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$. On montre d'abord qu'il y a au moins un rationnel.

LEMME II.6. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, alors $\exists \gamma \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha < \gamma < \beta$.*

DÉMONSTRATION. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, on trouve un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $n(\beta - \alpha) > 1$. Alors il existe un entier m tel que

$$n\alpha < m < n\beta. \tag{II.4.1}$$

Si $n\beta$ n'est pas entier, on peut en effet prendre pour m la partie entière $[n\beta]$, sinon, on peut prendre $m = n\beta - 1$. Divisant par n les inégalité (II.4.1) et posant $\gamma = \frac{m}{n}$, on voit qu'on a

$$\alpha < \gamma < \beta.$$

□

THÉORÈME II.7. *Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, alors il existe une infinité de rationnels et d'irrationnels dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.*

DÉMONSTRATION. Entre α et β il y a un rationnel γ_1, entre γ_1 et β il y en a un autre γ_2, entre γ_2 et β il y en a encore un autre γ_3, ainsi de suite. On peut ainsi obtenir une infinité de rationnels dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$.

Pour n assez grand, on a

$$\alpha < \gamma < \gamma + \frac{\sqrt{2}}{n} < \beta.$$

Or $\gamma + \frac{\sqrt{2}}{n}$ est irrationnel. Entre α et β il y a donc un irrationnel δ_1, entre δ_1 et β il y en a un autre δ_2, ainsi de suite. On peut donc aussi obtenir une infinité d'irrationnels dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$. □

II.5. Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques, partout définies sur les réels, sont les trois fonctions suivantes :

- *sinus hyperbolique* : $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- *cosinus hyperbolique* : $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
- *tangente hyperbolique* : $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$

Le sinus et la tangente hyperbolique sont des *fonctions impaires* (pour tout x, on a $f(-x) = -f(x)$), le cosinus hyperbolique est une *fonction paire* ($f(-x) = f(x)$).

On établit aisément la formule

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = -1.$$

Dérivées. On a facilement

- $\sinh'(x) = \cosh$

- $\cosh'(x) = \sinh$

- $\tanh'(x) = 1 - \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$

Fonctions réciproques.

Les fonctions réciproques sont les suivantes

- *argument sinus hyperbolique* : $\arg\sinh$.
  Cette fonction est partout définie :
  $$\forall y \in \mathbb{R}, \arg\sinh(y) = x \iff y = \sinh(x).$$
- *argument cosinus hyperbolique* : $\arg\cosh$.
  Cette fonction est définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$:
  $$\forall y \in \mathbb{R}, y \geq 1, \arg\cosh(y) = x \iff x \geq 0, \text{ et } y = \cosh(x).$$
- *argument tangente hyperbolique* : $\arg\tanh$.
  Cette fonction est définie sur l'intervalle $]-1, +1[$:
  $$\forall y \in \mathbb{R}, -1 < y < 1, \arg\tanh(y) = x \iff y = \tanh(x).$$

Remarque II.8. Si $y = \cosh(x)$, alors on a aussi $y = \cosh(-x)$, c'est pourquoi il faut choisir la valeur de x pour $\arg\cosh(y)$. (Ceci n'est pas nécessaire pour le sinus et la tangente hyperboliques, car ces fonctions sont injectives). La fonction cosh restreinte à l'intervalle $[0, +\infty[$ est une bijection de cet intervalle sur l'intervalle $[1, +\infty[$, la fonction $\arg\cosh$ est la bijection réciproque.

CHAPITRE III

Suites numériques

III.1. Définitions

Définition III.1. Une *suite* (u_n) *de réels* est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ où on note u_n, de préférence à $u(n)$, l'image de $n \in \mathbb{N}$ par cette application. On dit aussi que (u_n) est une *suite numérique*.

Par exemple la suite des entiers naturels est la suite numérique telle que $u_n = n$.

On peut se donner une suite de diverses manières :

- Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction, sa restriction aux entiers définit une suite. Par exemple la fonction $f(x) = x^2 + 1$ définit la suite (u_n) où $u_n = n^2 + 1$.
- On peut procéder par récurrence : on donne u_0 ainsi qu'une formule qui donne la valeur de u_{n+1} en fonction de celle de u_n. Par exemple, si on pose $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 1$, on retrouve la suite des entiers naturels.
- On peut procéder par double récurrence : on donne u_0 et u_1 ainsi qu'une formule qui donne la valeur de u_{n+2} en fonction de celle de u_n et u_{n+1}. Par exemple, on pose $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$. C'est la fameuse *suite de Fibonacci*, dont on donne ci-dessous les premiers termes :
$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Remarques III.2. 1) On pourrait encore imaginer une triple récurrence, et plus largement, envisager n'importe quel procédé qui permette de définir une application des entiers dans les réels.

2) On peut aussi considérer des suites (u_n) indexées à partir d'un entier k (l'application u n'est définie que sur les entiers $n \geq k$). On note $(u_n)_{n\geq k}$ lorsqu'on veut indiquer à partir de quel entier on indexe la suite. Par exemple on peut considérer la suite $(\ln(n))_{n\geq 1}$ (qui n'est définie que pour $n \geq 1$).

3) On peut aussi considérer des suites de complexes, définies par une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{C}$. Pour tout n, on a alors $u_n \in \mathbb{C}$. Une suite de réels n'est jamais qu'une suite de complexes particulière.

DÉFINITIONS III.3. Soit (u_n) une suite de réels.

- On dit que la suite (u_n) est *monotone croissante* (resp. *monotone décroissante*) si il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).
- On dit que la suite (u_n) est *stationnaire* si il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_{n+1} = u_n$.
- On dit que la suite (u_n) est *majorée* (resp. *minorée*) si il existe un entier N et un nombre réel A tel que, pour tout $n \geq N$, on a $u_n \leq A$ (resp. un nombre réel B tel que $u_n \geq B$). On dit que la suite est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

REMARQUES III.4. 1) Seul le comportement asymptotique nous intéresse, c'est pourquoi on considère chaque propriété *pour n grand* (c'est à dire pour n supérieur à un certain entier N).

2) On peut aussi parler de suite *strictement monotone* : si, pour n grand, on a $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$), on dit que la suite est *strictement croissante* (resp. *strictement décroissante*).

3) Il n'y a pas d'ordre naturel sur les complexes et la notion de suite monotone complexe n'a donc aucun sens. En revanche, on peut parler de *suite complexe stationnaire* (avec la même définition que pour les suites réelles) ainsi que de *suite complexe bornée* : on dit qu'une suite complexe (u_n) est bornée, s'il existe un entier N et un réel $M > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, on a $|u_n| \leq M$.

Suite extraite.

DÉFINITION III.5. Soit (u_n) la suite numérique définie par l'application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ une application (des entiers sur les entiers) strictement croissante. La suite (v_n) définie par l'application $v = u \circ \varphi$ est appelée *suite extraite* de (u_n).

La suite extraite (v_n) est donc telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$.

EXEMPLES III.6. 1) Soit $k > 0$ un entier et φ l'application telle que $\varphi(n) = n + k$. La suite extraite est alors la suite (v_n) telle que $v_n = u_{n+k}$ (obtenue en ignorant les k premiers termes et en décalant les autres termes de la suite).

2) Soit φ l'application telle que $\varphi(n) = 2n$. La suite extraite est alors la suite (v_n) telle que $v_n = u_{2n}$ (obtenue en ne gardant que les termes d'indice pair).

3) Soit φ l'application telle que $\varphi(n) = n^2$. La suite extraite est alors la suite (v_n) telle que $v_n = u_{n^2}$ dont les premiers termes sont

$$u_0, u_1, u_4, u_9, u_{16}, u_{25}, \ldots .$$

III.2. Convergence

DÉFINITION III.7. On dit qu'une suite (u_n) *converge vers* $a \in \mathbb{R}$, on note $\lim_{n\to\infty}(u_n) = a$, si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

On dit aussi que a est *la limite de la suite* (u_n). Si la suite a une limite, on dit qu'elle est *convergente*, sinon on dit qu'elle est *divergente*.

On peut aussi dire que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon$$

pour n grand (c'est à dire supérieur à un entier N). Soulignons que N dépend du réel ε (on pourrait le noter N_ε pour bien insister sur ce point).

EXEMPLES III.8. 1) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est convergente de limite 0.

2) Une suite stationnaire est convergente de limite la valeur commune des termes u_n (valeur commune pour n grand).

On dit *la* limite, car celle ci est unique :

PROPOSITION III.9. *Une suite* (u_n) *a au plus une limite.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde qu'il y a deux limites $a < b$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon \leq b - \varepsilon$ (par exemple $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$). Alors, pour n grand, on a

$$a - \varepsilon < u_n < a + \varepsilon \leq b - \varepsilon < u_n < b + \varepsilon.$$

On aboutit à une contradiction ! $\square$

On ne change pas la limite d'une suite en négligeant un nombre fini de termes. Plus généralement, on a le résultat suivant.

THÉORÈME III.10. *Si une suite* (u_n) *est convergente et de limite* a*, alors toute suite extraite de la suite* (u_n) *est convergente et de limite* a*.*

DÉMONSTRATION. Si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors $\varphi(n) \geq n$ pour tout n. On peut s'en convaincre par récurrence : pour $n = 0$, on a $\varphi(0) \geq 0$, et si c'est vrai pour n, alors $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, donc $\varphi(n+1) \geq n+1$.

Pour la suite (u_n) on a

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Comme $\varphi(n) \geq n$, $n \geq N \Rightarrow \varphi(n) \geq N \Rightarrow |u_{\varphi(n)} - a| < \varepsilon$.

Pour la suite extraite (v_n) définie par $v_n = u_{\varphi(n)}$, on a donc aussi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n - a| < \varepsilon.$$

$\square$

Remarque III.11. Inversement, il se peut que la suite (u_n) diverge mais qu'une suite extraite converge. Par exemple si $u_n = (-1)^n$, la suite (u_n) diverge mais la suite extraite en ne retenant que les termes d'indice pair converge vers 1 (elle est stationnaire, de valeur 1), la suite extraite en ne retenant que les termes d'indice impair converge vers -1.

Théorème III.12. *Si une suite est convergente, alors elle est bornée.*

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = a$: Il existe N tel que,

$$n \geq N \Longrightarrow a - 1 < u_n < a + 1.$$

Posons $A = \max\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, a+1\}, B = \min\{u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, a-1\}$. Alors, pour tout n, on a

$$B \leq u_n \leq A.$$

□

Remarque III.13. Il ne suffit pas qu'une suite soit bornée pour être convergente : la suite $u_n = (-1)^n$ évoquée plus haut est divergente, cependant elle est bornée.

III.3. Somme, produit, inégalités

A partir de deux suites (u_n) et (v_n), on peut former la *suite somme* $(u_n + v_n)$ et la *suite produit* $(u_n v_n)$.

Proposition III.14. *Si les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes, avec $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = a$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = b$, alors les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont convergentes et on a*

- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = a + b$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = ab$.

On retiendra que *la limite de la somme est la somme des limites* et que *la limite du produit est le produit des limites.*

Démonstration. Laissons la somme en exercice. Pour le produit on écrit :

$$u_n v_n - ab = u_n v_n - u_n b + u_n b - ab.$$

On note que la suite (u_n) est bornée, puisqu'elle est convergente [Théorème III.12] : il existe A tel que $\forall n, u_n \leq A$ (et on peut toujours supposer $A > 0$). On a donc

$$|u_n v_n - ab| \leq A|v_n - b| + |u_n - a||b|.$$

Pour n grand, $|v_n - b|$ et $|u_n - a|$ sont petits :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - a| < \frac{\varepsilon}{A + |b|},$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Rightarrow |v_n - b| < \frac{\varepsilon}{A + |b|}.$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors

$$n \geq N \Rightarrow |u_n v_n - ab| < \frac{A\varepsilon}{A+|b|} + \frac{|b|\varepsilon}{A+|b|} = \varepsilon.$$

□

De même on peut considérer la suite (αu_n) (où α est une constante), la *suite différence* $(u_n - v_n)$ et la suite quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ (si $v_n \neq 0$).

Corollaire III.15. *Si* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = a$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = b$, *alors*

- $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha u_n) = \alpha a$,
- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = a - b$,
- *et si* $b \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$.

Inégalités.

Proposition III.16. *Si les suites* (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes, avec* $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = a$ *et* $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = b$, *et si* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang,alors* $a \leq b$.

On retiendra que *la limite respecte les inégalités.*

Remarques III.17. 1) On ne change pas la nature ni la limite d'une suite en négligeant un nombre fini de termes, il n'est donc pas nécessaire de supposer l'inégalité pour tout n, mais seulement *pour n grand.*

2) On peut avoir l'inégalité stricte $u_n < v_n$ pour n grand mais seulement l'inégalité large $a \leq b$. C'est le cas des suites (α_n) et (β_n) du chapitre précédent qui convergent toutes deux vers $\sqrt{2}$.

On a aussi le *théorème des gendarmes* :

Théorème III.18. *Si deux suites* (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes, de même limite* a, *et si la suite* (w_n) *est telle que* $u_n \leq w_n \leq v_n$ *pour* n *grand, alors la suite* (w_n) *converge aussi vers cette limite* a.

Démonstration.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n \geq N \Rightarrow a - \varepsilon < u_n \leq w_n \leq v_n < a + \varepsilon.$$

□

III.4. Limites infinies

Définition III.19. On dit qu'une suite (u_n) *tend vers l'infini*, on note $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = \infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A.$$

De même, (u_n) *tend vers moins l'infini*, on note $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = -\infty$, si

$$\forall B \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \leq B.$$

Dans un cas comme dans l'autre, la suite (u_n) n'est pas bornée et n'est donc pas convergente.

Opérations sur les limites.

Si les suites (u_n) et (v_n) tendent toutes deux vers l'infini, il est facile de voir qu'il en est de même de la somme $(u_n + v_n)$. On peut résumer ceci par la règle "$\infty + \infty = \infty$." On peut ainsi dresser un tableau d'opérations sur les limites :

PROPOSITION III.20. (1) $\infty + \infty = \infty$.

(2) $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
(3) $\forall a \in \mathbb{R}, a + \infty = \infty$.
(4) $\forall a \in \mathbb{R}, a + (-\infty) = -\infty$.
(5) $\infty\infty = \infty$.
(6) $(-\infty)(-\infty) = \infty$.
(7) $(-\infty)\infty = -\infty$.
(8) $\forall a \neq 0, a\infty = \pm\infty$ (*en respectant la règle des signes*).
(9) $\forall a \neq 0, \frac{a}{\infty} = 0$.

Par exemple (8) veut dire que si on a $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = a > 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = -\infty$.

Formes indéterminées. Si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n) = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n) = \infty$, on ne peut rien conclure a priori pour la suite somme $(u_n + v_n)$. Supposons par exemple que $u_n = -n$ et envisageons quatre possibilités pour v_n :

(1) $v_n = a + n$. Alors $u_n + v_n = a$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = a$,
(2) $v_n = n^2$. Alors $u_n + v_n = n^2 - n$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = \infty$,
(3) $v_n = \frac{n}{2}$. Alors $u_n + v_n = -\frac{n}{2}$, donc $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n + v_n) = -\infty$,
(4) $v_n = (-1)^n + n$. Alors $u_n + v_n = (-1)^n$, donc $(u_n + v_n)$ n'a pas de limite.

On voit que tout est possible pour la suite somme. On dit que "$(-\infty) + \infty$" est une *forme indéterminée*. On peut donner d'autres exemples :

$$\bullet\ (-\infty) + \infty, \quad \bullet\ 0\infty, \quad \bullet\ \frac{0}{0}, \quad \bullet\ \frac{\infty}{\infty}.$$

III.5. Borne supérieure, borne inférieure

Majorant, minorant, maximum, minimum.

DÉFINITION III.21. Soit E un ensemble ordonné et $A \subseteq E$ une partie de E.

(1) On dit qu'un élément $a \in E$ est un *majorant* de A si

$$\forall x \in A, x \leq a.$$

(2) On dit que $a \in E$ est un *minorant* si

$$\forall x \in A, x \geq a.$$

Si une partie A admet un majorant (resp. un *minorant*) on dit qu'elle est majorée (resp. *minorée*).

Une partie peut n'admettre aucun majorant, par exemple l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers n'est pas une partie majorée de $\mathbb{R}$. Elle peut en admettre plusieurs, par exemple les entiers positifs sont tous des majorants de la partie formée par les entiers négatifs dans $\mathbb{R}$.

Un majorant est un éléments de E, il n'appartient pas nécessairement à A, en fait au plus un majorant peut appartenir à A : si $a, b \in A$ sont deux majorants, alors $a \leq b$ (car b est un majorant et $a \in A$) et $b \leq a$ (car a est un majorant et $b \in A$) donc $a = b$. Si $a \in A$ est (l'unique) majorant de A, on dit que c'est *le plus grand élément de* A ou le *maximum* de A.

Une partie peut être majorée et cependant ne pas admettre de plus grand élément, par exemple l'intervalle ouvert $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$ est majoré et n'admet pas de maximum.

Tout ce qui est plus haut vaut évidemment pour les minorants et *le plus petit élément* ou *minimum* (éventuel) de A.

Élément maximal, élément minimal.

DÉFINITION III.22. Soit E un ensemble ordonné et $A \subseteq E$ une partie de E.

(1) On dit qu'un élément $a \in A$ est un *élément maximal* de A si

$$x \in A, x \geq a \Rightarrow x = a.$$

(2) On dit qu'un élément $a \in A$ est un *élément minimal* de A si

$$x \in A, x \leq a \Rightarrow x = a.$$

Cette fois il s'agit d'éléments de A. Pour résumer,

- un majorant est un élément **de E** qui dépasse **tous** les éléments de A,
- un élément maximal est un élément **de A** qui n'est dépassé **par aucun** élément de A.

Une partie A peut n'admettre aucun élément maximal : c'est le cas de l'intervalle ouvert $]0, 1[$ de $\mathbb{R}$. Elle peut en admettre plusieurs et tout ceci vaut aussi pour les élément minimaux. Donnons l'exemple d'une partie avec plusieurs éléments minimaux.

Exemple III.23. Soit $E = \mathbb{N}$ l'ensemble des entiers. C'est un ensemble ordonné par la relation de divisibilité : on pose $x \preceq y$ si x divise y. Soit A la partie formée par tous les entiers dont on exclut 0 et 1. Les éléments minimaux de A sont alors les nombres premiers. En effet, si p est premier il n'est divisible que par 1 et par lui-même, or $1 \notin A$:

$$x \in A \text{ et } x \preceq p \Rightarrow x = p.$$

On a cependant les propriétés suivantes.

Proposition III.24. *Soit E un ensemble ordonné, $A \subseteq E$ une partie de E et $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) *a est à la fois un élément maximal et un majorant de A,*

(2) *a est un majorant de A et $a \in A$,*

(3) *a est le maximum de A.*

Dans ces conditions a est l'unique élément maximal de A.

Démonstration. On raisonne par implications circulaires :
(1) $\Rightarrow$ (2) Si a un élément maximal de A, alors $a \in A$ par définition.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si a est un majorant et $a \in A$, on a dit plus haut qu'alors a est le maximum de A.
(2) $\Rightarrow$ (3) Si a est le maximum, c'est un majorant et $\forall b \in A, b \neq a$ on a $b < a$. Donc a est un élément maximal et b ne l'est pas. On a bien l'implication voulue et on voit qu'en outre a est l'unique élément maximal. □

Corollaire III.25. *Si E est totalement ordonné et si A admet un élément maximal, alors il est unique et c'est le maximum de A.*

Démonstration. Si A admet un élément maximal a, alors pour tout $b \in A$, b se compare à a, donc $b \leq a$ (puisque a est maximal). □

Borne supérieure, borne inférieure.

Définition III.26. Soit E un ensemble ordonné et $A \subseteq E$ une partie de E.

(1) On dit qu'un élément $a \in E$ est la *borne supérieure* de A si c'est le plus petit des majorants de A. On note alors $a = \mathrm{Sup}(A)$.

(2) On dit qu'un élément $a \in E$ est la *borne inférieure* de A si c'est le plus grand des majorants de A. On note alors $a = \mathrm{Inf}(A)$.

La borne supérieure est le minimum de l'ensemble des majorants, si elle existe elle est donc unique.

La borne supérieure est un élément de E, elle n'est pas nécessairement dans A. D'ailleurs, on a la proposition suivante.

Proposition III.27. *Soit E un ensemble ordonné, $A \subseteq E$ une partie de E et $a \in A$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1) $a = \sup(A)$ *et* $a \in A$.

(2) a *est le maximum de* A.

Démonstration. La borne supérieure est un majorant et on a déjà vu que si un majorant est dans A alors c'est le maximum. Réciproquement, le maximum m est un majorant, et si a est un autre majorant a, on a $m \leq a$, puisque $m \in A$. □

Pour que A admette une borne supérieure, il est évidemment nécessaire qu'il existe des majorants ! Pour $\mathbb{R}$ la condition est suffisante :

Théorème III.28. *Toute partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. une borne inférieure).*

On admet ce résultat. On peut maintenant caractériser la borne supérieure.

Théorème III.29. *Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$ et M un réel. Alors $M = \text{Sup}(A)$ si et seulement si on a les deux conditions suivantes.*

(1) $\forall x \in A, x \leq M$,

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A, M - \varepsilon < x \leq M$.

Démonstration. La première condition exprime que M est un majorant, la seconde que tout réel plus petit que M n'est pas un majorant. Donc les deux conditions réunies expriment que M est le plus petit des majorants. □

On laisse en exercice la caractérisation analogue de la borne inférieure.

Suite monotone bornée, suites adjacentes.

Théorème III.30. *Soit (u_n) une suite croissante (resp. décroissante) de $\mathbb{R}$. Alors la suite (u_n) converge si et seulement si elle est majorée (resp. minorée). Dans ce cas elle converge vers la borne supérieure (resp. la borne inférieure) de la partie $A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ formée par les éléments de la suite.*

Démonstration. Si une suite converge, alors elle est bornée [Théorème III.12], la condition est donc nécessaire. Inversement si une suite croissante est majorée, soit $M = \sup(A)$. Il résulte de la caractérisation de la borne supérieure [Théorème III.29] qu'on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, M - \varepsilon < u_{n_0} \leq M.$$

Comme la suite est croissante et que M majore tous les termes de la suite, on tire

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow M - \varepsilon < u_n \leq M.$$

Ainsi la suite converge vers M. On raisonne de manière identique pour une suite décroissante minorée. □

Corollaire III.31. *Soit* (u_n) *et* (v_n) *deux suites telles que*

(1) (u_n) *est croissante,* (v_n) *est décroissante (à partir d'un certain rang),*

(2) $u_n \leq v_n$ *(pour* n *grand),*

(3) *la différence* $u_n - v_n$ *tend vers* 0.

Alors les suites (u_n) *et* (v_n) *sont convergentes et ont même limite.*

Définition III.32. Dans les conditions du corollaire on dit que les suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes.*

C'est le cas des suites (α_n) et (β_n) du chapitre précédent qui convergent toutes deux vers $\sqrt{2}$.

III.6. Suite de cauchy

Si une suite (u_n) est convergente, il est clair que la différence $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0. Cependant cette condition n'est pas suffisante. On donne un exemple.

Exemple III.33. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1}$, il est donc clair que cette différence tend vers 0. Cependant on a

$$u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \ldots + \frac{1}{2n}$$

et chaque terme de la somme est minoré par le dernier, donc

$$u_{2n} - u_n \geq n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

La suite n'est donc pas majorée, en effet elle est croissante, et si u_n atteint la valeur A alors u_{2n} atteint une valeur supérieure à $A + \frac{1}{2}$. Donc (u_n) ne converge pas.

Une condition nécessaire et suffisante est donnée par les suites de Cauchy.

Définition III.34. Soit (u_n) une suite (de réels ou de complexes). On dit que la suite (u_n) est une *suite de Cauchy* si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, m, n \geq N \Rightarrow |u_m - u_n| < \varepsilon.$$

Théorème III.35. *Soit* (u_n) *une suite (de réels ou de complexes). Alors* (u_n) *est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.*

On admet que la condition est suffisante. C'est une propriété de $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{C}$), on dit que $\mathbb{R}$ est *complet.* On démontre qu'elle est nécessaire :

DÉMONSTRATION. Si (u_n) converge vers une limite a, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, n \geq N \Rightarrow |u_n - a| < \varepsilon.$$

Choisissons l'entier N correspondant à $\frac{\varepsilon}{2}$,

– pour $n \geq N$, on a $|u_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$,
– pour $m \geq N$, on a $|u_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$,

Donc pour $m, n \geq N \Rightarrow$ on a

$$|u_m - u_n| \leq |u_n - a| + |u_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Notons qu'une suite de Cauchy dont les termes sont des rationnels ne converge pas nécessairement dans $\mathbb{Q}$, autrement dit $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet les suites (α_n) et (β_n) du chapitre précédent convergent vers $\sqrt{2}$. Ce sont des suites de rationnels, donc de réels, convergentes dans $\mathbb{R}$, donc de Cauchy. La limite est dans $\mathbb{R}$ (qui est complet), elle n'est pas dans $\mathbb{Q}$ (qui ne l'est pas).

CHAPITRE IV

Dérivation (plan du cours)

IV.1. Limite d'une fonction

– Limite, limite à droite, à gauche.

– Unicité de la limite.

– Somme et produit de limites.

– Inégalités.

– Limite de fonctions composées.

IV.2. Dérivée

– Fonction dérivable, différentielle.

– Dérivée et continuité.

– Dérivée de la somme, du produit, du quotient.

– Dérivée de fonctions composées.

– Limite de fonctions composées.

IV.3. Fonction dérivée, dérivées successives

- Fonction dérivée.
- Dérivée seconde, dérivées successives.
- Formule de Leibniz.

CHAPITRE V

Continuité (plan du cours)

V.1. Algèbre des fonctions continues

– Somme et produit de fonctions continues.

– Continuité uniforme.

V.2. Continuité et suites

Théorème V.1. *f est continue en a, si et seulement si, pour toute suite (a_n) qui tend vers a, la suite (b_n) telle que $b_n = f(a_n)$ tend vers $b = f(a)$.*

Théorème V.2 (Bolzano Weierstrass). *De toute suite de réels dans un intervalle fermé borné on peut extraire une sous suite convergente.*

V.3. Fonctions continues sur un intervalle

Théorème V.3 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Si β est un réel entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \beta$.*

Théorème V.4 (Théorème des extrema). *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Alors f est bornée sur cet intervalle et les bornes sont atteintes : Si M et m désignent respectivement la borne supérieure et la borne inférieure des valeurs prises, alors il existe c_1 et c_2 dans l'intervalle $[a, b]$ tels que $f(c_1) = M, f(c_2) = m$.*

Corollaire V.5. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors l'image $f(I)$ de I est un intervalle.*

V.4. Fonctions continues monotones, fonctions réciproques

LEMME V.6. *Soit f une fonction monotone sur un intervalle I. Alors f est continue sur I si et seulement si $f(I)$ est un intervalle.*

THÉORÈME V.7. *Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors f est une bijection de I sur $J = f(I)$. La bijection réciproque f^{-1} est continue strictement monotone (de même sens de variation que f) sur J.*

Dérivée de la fonction réciproque.

Si f est bijective et dérivable et $f(x) = y$, la dérivée de la bijection réciproque f^{-1} en y est donnée par la formule

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Tableau des dérivées des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques.

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arg\sinh'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\arg\cosh'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$\arg\tanh'(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

De la dernière, on tire

$$\arg\tanh(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right).$$

V.5. Théorème des accroissements finis

THÉORÈME V.8 (Théorème de Rolle). *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et dérivable dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$ alors il existe c tel que $a < c < b$ et $f'(c) = 0$.*

COROLLAIRE V.9. *Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$ et dérivable dans l'intervalle ouvert $]a,b[$. Alors il existe c tel que $a < c < b$ et $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

THÉORÈME V.10 (Théorème des accroissements finis). *Soit f une fonction dérivable dans un intervalle I. Si la dérivée est bornée sur I, soit $\forall x \in I, |f'(x)| \leq K$, alors, pour tout couple de points (x,y) de I on a*

$$|f(y) - f(x)| \leq K|y - x|.$$