Université Aix Marseille III
Licence Mathématiques MI - Semestre 1 **Module M1**

Devoir 1
A rendre le 6/11/07

I Soit

$$\begin{cases} f : [-1, +\infty[\to \mathbb{R}_+^* \\ \qquad x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}} \end{cases}$$

Montrer que f est une bijection et déterminer sa bijection réciproque.

II Résoudre l'équation (E) d'inconnue x réelle suivante :

$$(E) \quad Argth(x) + Argth(2x) = Argth(\frac{2}{3})$$

III Montrer en utilisant la définition de limite que la suite $(-1 + \dfrac{4}{n^3+1})_n$ converge vers -1.

Montrer en utilisant la définition de limite que la suite $(7 + \dfrac{n^2+1}{10})_n$ diverge vers $+\infty$.

IV Montrer que toute suite $(u_n)_n$ convergente d'éléments de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

V Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} (1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ (2) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad f(xy) = f(x)f(y) \\ (3) \quad f(1) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad f(n) = n$.
2) Montrer que $\forall\, r \in \mathbb{Q} \quad f(r) = r$.
3) Montrer que f est strictement croissante.
4) En déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$.