

Partiel M1 - 16/11/2007

Durée : 1h30

La clarté et la précision de la rédaction seront des éléments essentiels d'appréciation de la copie.

Questions de cours :

1. Soit A une partie non vide et majorée de \mathbb{R} . Soit $a \in \mathbb{R}$.
 - a) Donner la définition de a est un majorant de A .
 - b) Donner la définition et la caractérisation de a est la borne supérieure de A .
2. Enoncer (avec des quantificateurs) la propriété disant que le corps des réels est archimédien.

Exercice 1 : Soient A et B deux parties non vides, majorées de \mathbb{R} .

1. Montrer que :

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$$

2. On suppose que $A \cap B$ est non vide. Montrer que :

$$\sup(A \cap B) \leq \min(\sup(A), \sup(B))$$

Donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 2 :

- (1) On considère les fonctions $\operatorname{sh}(x)$, $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

(1.a) Tracer leur graphe.

(1.b) Préciser si ces fonctions sont injectives, surjectives, bijectives de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

- (2) Trouver une bijection entre le segment $] - 1, 1[$ et le segment $]0, 4[$

Exercice 3 :

Soit x un réel et n un entier relatif. Montrer que $E(x + n) = n + E(x)$.

(On note $E(a)$ la partie entière de a .)

Exercice 4 : Donner la limite de chacune des suites ci-dessous, lorsqu'elle est convergente, sinon, préciser si la suite tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou bien n'a aucune limite :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}, \quad v_n = \frac{(-1)^n n}{n+2}, \quad w_n = (-1)^n + \sqrt{n}, \quad t_n = \frac{\sqrt{2n}}{\sqrt{n + (-1/2)^n}}.$$

Exercice 5 : Soit A l'ensemble défini par :

$$A = \left\{ \frac{n+1}{4n+3} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Déterminer, lorsqu'ils existent, les bornes supérieure et inférieure, le plus petit élément et le plus grand élément de A .