Université Aix Marseille III
Licence Mathématiques MI - Semestre 1 **Module M1**

TD 1

Le but du TD n'est pas de recopier passivement la correction
mais de participer activement à la résolution des exercices proposés !

I. Calculer pour tout entier $n \geq 1$ les sommes suivantes :

$$S1 = \sum_{k=0}^{n} k \quad S2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad S3 = \sum_{k=0}^{n} k^3$$

II Montrer que :

$$\forall\, n \geq 2, \quad u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \notin \mathbb{N}$$

Indication : On pourra montrer par récurrence que u_n est le quotient d'un entier impair et d'un entier pair en distinguant les cas n pair et n impair.

III Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \ldots \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

IV Montrer que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

V Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini (proposer deux types de dé - monstration). Montrer l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme 4n + 3 (quelle généralisation pouvez vous donner ?).

VI Une autre démonstration de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.
En supposant que $a = \sqrt{2}$ soit irrationnel, en déduire l'existence d'un entier c tel que ac soit entier. Soit b le plus petit entier naturel vérifiant cette propriété (justifier l'existence de b), montrer que $m = b(a-1)$ est un entier naturel vérifiant $m < b$. En observant ma, en déduire une contradiction.
Généraliser cette méthode pour $\sqrt{n}$ où n n'est pas un carré parfait.

VII Soient x et y des réels positifs. Montrer que :

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

VIII Soient a et b des nombres réels tels que $0 \leq a < b$.
1 Montrer que $a^2 < b^2$,
2 Montrer que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$,
3 Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $a^n < b^n$.

IX Soient a et b des nombres réels. On suppose que pour tout réel $x > b$, on a $a \leq x$. Montrer que $a \leq b$.

X Montrer que l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x + 3$ est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

XI a) Etablir une bijection entre $[0, 1]$ et $[-1, 1]$.
b) Etablir une bijection entre $]0, 1[$ et $\mathbb{R}$.

XII Soit

$$\begin{cases} f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ \quad n \mapsto n^2 - 4n + 4 \end{cases}$$

L'application f est elle bijective ? Quel est l'ensemble $f^{-1}(\{2, 3\})$?

XIII Trouver toutes les bijections f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leq n$$

XIV On applique $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ de la façon suivante $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 2$, $f(4) = -2$, etc

Définir mathématiquement cette application et montrer qu'il s'agit d'une bijection.

Même question avec g de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ amorcée par $g(0) = (0, 0)$, $g(1) = (1, 0)$, $g(2) = (0, 1)$, $g(3) = (2, 0)$, $g(4) = (1, 1)$, ...

XV Examiner l'énoncé suivant : Si $f \circ g = Id$ alors f et g sont des applications bijectives. Justifiez.

XVI Soit $f : E \to F$ une application d'un ensemble E vers un ensemble F. Montrer que

$$f \text{ est injective } \iff \forall A \subset E \quad f^{-1}(f(A)) = A$$

$$f \text{ est surjective } \iff \forall B \subset F \quad f(f^{-1}(B)) = B$$

XVII Soit f une application de E vers F. Montrer que :

$$f \text{ est injective } \iff \forall (A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) \text{ on a } f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

XVIII Soit f une application de E vers E telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que si f est injective ou surjective alors $f^2 = id_E$.

XIX Soit f une application de E vers E telle que $f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

XX Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

$$(1) \quad \text{Si } g \circ f \text{ est injective, alors } f \text{ est injective}$$

$$(2) \quad \text{Si } g \circ f \text{ est surjective, alors } g \text{ est surjective}$$

XXI Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f \circ f(n) = n + 1$.