Université Aix Marseille III
Licence Mathématiques MI - Semestre 1 **Module M1**

TD 2

I Montrer que

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{2^n} < \epsilon$$

Existe t'-il un entier n tel que $\forall \epsilon > 0$, $\dfrac{1}{2^n} < \epsilon$?

II a) Ecrire sous forme d'une union d'intervalles l'ensemble des réels x tels que la partie fractionnaire de x soit inférieure strictement à $\dfrac{1}{5}$.

b) Calculer $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$ et $\displaystyle\bigcup_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$.

c) Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} \left[\frac{-1}{n}, 2+\frac{1}{n}\right[$.

d) Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} \left]0, \frac{1}{n}\right[$.

e) Déterminer $\displaystyle\bigcap_{n\geq 1} \Big[n, +\infty\Big[$.

III Déterminer l'intersection $\bigcap_{n\geq 1} I_n$ dans les cas suivants :

$$\begin{cases} a)\ I_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 1\right] \\ b)\ I_n = \left[-\frac{1}{2^n}, 3 - \frac{2}{n^2}\right] \\ c)\ I_n = \left[0, e^{-n}\right] \end{cases}$$

IV Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ avec A bornée et $B \subset A$. Comparer les bornes $supA$, $supB$, $infA$, $infB$.

V Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$-A = \{-x \ / \ x \in A\}$$

$$A + B = \{x + y \ / \ x \in A, y \in B\}$$

$$a + A = \{a + x \ / \ x \in A\}$$

$$AB = \{xy \ / \ x \in A, y \in B\}$$

1 Montrer que $sup(-A) = inf(A)$

2 Montrer que $sup(A+B) = sup(A) + sup(B)$

3 Montrer que $sup(a+A) = a + sup(A)$

4 A t'-on $sup(AB) = sup(A)sup(B)$?

VI Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $A \cup B$ est non vide et bornée et déterminer $sup(A \cup B)$ et $inf(A \cup B)$.

VII Soit E le sous ensemble de $\mathbb{R}$ suivant :

$$E = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \ / \ (m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \right\}$$

Déterminer $sup(E)$ et $inf(E)$. Justifier.

VIII Soit A l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Cet ensemble est il majoré ? minoré ? A admet il un plus grand élément ? un plus petit ? une borne supérieure ? une borne inférieure ? Justifier.

IX Soient a et b deux réels, montrer que :

$$\mathbf{1)} \quad a \leq b \Rightarrow E(a) \leq E(b)$$

$$\mathbf{2)} \quad E(a) + E(b) \leq E(a+b) \leq E(a) + E(b) + 1$$

X Montrer que, pour tout réel x et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$$

XI On donne

$$A = \left\{ \frac{1}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad B = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{n} + (-1)^n \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\} \quad D = \left\{ n + \frac{(-1)^n}{2} \ / \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Etudier pour chacune de ces parties de $\mathbb{R}$ la question d'existence :

- des bornes supérieure et inférieure dans $\mathbb{R}$,
- du plus petit élément et du plus grand élément.

XII Trouver l'ensemble des nombres réels qui vérifient l'inégalité :

$$(x+1)^2 - |x-2| \leq 0$$

XIII En utilisant la définition de limite, montrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1} = 0$$

XIV Montrer que la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$$

n'admet pas de limite.

XV On considère la suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{u_{n-1}}{2} + \frac{1}{u_{n-1}} \end{cases}$$

1) Montrer que cette suite est une suite décroissante de nombres rationnels, minorée par $\sqrt{2}$. En déduire sa nature.

2) Montrer que

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{2})^2$$

3) En déduire que

$$\forall n \geq 0 \quad 0 \leq u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n}$$

4) Soit $I_n = [1, u_n]$. Déterminer $\bigcap_{n \geq 0} I_n$.

5) Soit $J_n = \left[\frac{2}{u_n}, u_n\right]$. Déterminer $\bigcap_{n \geq 0} J_n$. L'ensemble $\mathbb{Q}$ vérifie t'il la propriété des segments emboîtés ?