Université Aix Marseille III
Licence Mathématiques MI - Semestre 1 **Module M1**

TD 3

I a) En utilisant la définition de limite, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^3+1} = 0$$

b) En utilisant la définition de limite, montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$$

II a) Calculer les limites des suites définies par leur terme général dans chacun des cas suivants:

$$u_n = (n^2+n+1)^{\frac{1}{n}}$$

$$v_n = \sqrt{n^2+9} - n$$

b) Montrer que la suite $(w_n)_n$ de terme général

$$w_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$$

est convergente. On ne cherchera pas à préciser sa limite et on remarquera que

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} \text{ si } n > 1$$

III Parmi les assertions suivantes, concernant les suites réelles, dire quelles sont celles qui sont fausses (on donnera alors un contre-exemple) et celles qui sont vraies (on donnera une démonstration):

1. Une suite converge si et seulement si elle est bornée.
2. Si une suite est croissante et convergente, elle est majorée.
3. Si une suite converge et est majorée, alors elle est croissante.
4. Si une suite est décroissante et positive alors elle converge.
5. Si une suite est croissante et non majorée, alors elle diverge.
6. Si une suite est non croissante et non majorée, elle diverge.
7. Pour toute suite $(a_n)_n$ et tout réel λ, la suite $(\lambda a_n)_n$ est de même nature que la suite $(a_n)_n$.
8. Si $(a_n)_n$ converge et $(b_n)_n$ diverge, alors $(a_n+b_n)_n$ diverge.
9. Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ divergent, alors $(a_n+b_n)_n$ diverge.
10. Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ divergent, alors $(a_n \,.\, b_n)_n$ diverge.

IV Etudier les suites de terme général suivant :

$$u_n = \frac{e^n}{n+1} \quad v_n = \frac{a^n}{n!} \text{ pour } a > 1 \quad w_n = \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}}{2} \quad x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

V Etudier la convergence de la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2+p}$$

VI Soit la suite $(s_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$s_n = \frac{1}{5} + \frac{4}{5^2} + \frac{7}{5^3} + \ldots + \frac{3n-2}{5^n}$$

a) La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ est elle croissante ?
b) Montrer que

$$s_{n+1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}s_n + \frac{3}{20}(1 - \frac{1}{5^n})$$

c) Prouver que $(s_{n+1})_n$ est majorée.
d) Montrer que $(s_n)_{n\geq 1}$ converge et trouver sa limite.

VII Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général

$$u_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

converge.

VIII Etudier la nature de la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = ln(1 + u_n) \end{cases}$$

IX Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par :

$$\begin{cases} \text{la donnée de } u_0 \text{ réel} \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ où } f(x) = x^3 - 2x^2 + x \end{cases}$$

a) Etudier la dérivabilité de f et donner son tableau de variations :

b) Existe t'il des intervalles stables par f ? Justifier.

c) Etudier dans un tableau le signe de $g(x) = f(x) - x$.

d) Donner l'allure du graphe de f.

e) Quelles sont les limites éventuelles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

f) Que dire de la monotonie de la suite si $u_0 \in]-\infty, \frac{1}{3}[$?

g) Etudier la convergence de la suite dans les deux cas suivants et donner une interprétation graphique sur le graphe de f :

– si $u_0 \in]0, \dfrac{1}{3}[$

– si $u_0 \in]-\infty, 0[$

X On considère la suite (de Fibonacci) donnée par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \quad u_1 = 1 \\ \forall n \geq 2 \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall\, n \geq 2 \quad u_n \geq (\sqrt{2})^n$ et en déduire la nature de la suite.
b) Montrer que

$$\forall n > 0 \quad u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$$

c) On pose $v_n = \dfrac{u_n}{u_n \; - 1}$ Montrer que les suites $(v_{2n})_n$ et $(v_{2n+1})_n$ sont adjacentes, en déduire la convergence de la suite $(v_n)_n$.

d) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n, en déduire la valeur de la limite.