M1- Devoir 2

Exercice 1. Soit $a_n = n + \frac{1}{2n} - \sqrt{n^2+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Déterminer

$$\sup\{a_n, n \in \mathbb{N}\},\ \inf\{a_n, n \in \mathbb{N}\} \text{ et } \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Exercice 2.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de nombres <u>entiers</u>. Montrer que la suite est stationnaire, c'est-à-dire, qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $a_n = a$ pour tout $n > N$.

Exercice 3. Montrer que une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent (<u>Attention</u>: on ne suppose pas que les suites ont meme limite).

Exercice 4. Soit λ un réel, $\lambda \geq 0$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par:

$$a_1 = \lambda,\ \ a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}.$$

(a) Montrer que la suite est décroissante et minorée. En déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
(b) Calculer $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Exercice 5. (1) Déterminer la limite de la suite

$$\frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}.$$

(2) En déduire que pour tout $x < y \in \mathbb{R}$, il existe $q \in Q$ tel que $x \leq q \leq y$ (c'est-à-dire, que Q est dense dans $\mathbb{R}$).