M1 - TD n^0 1

Exercice 1 *Négation, implications*

On note (A) la phrase: "Les lampes de la pièce sont toutes allumées."
On note (B) la phrase: "Les lampes de la pièce ne sont pas toutes allumées."
On note (C) la phrase: "Aucune lampe de la pièce n'est allumée."
On note (D) la phrase: "Une lampe de la pièce est allumée."
On note (E) la phrase: "Exactement une lampe de la pièce est allumée."
Quelles sont les négations de ces phrases? Quelles implications y a-t-il entre (A), (B), (C), (D) et (E)?

Exercice 2 *Implications, équivalences*

Soient A, B, C des assertions. On suppose que $A \Rightarrow B$, que $B \Rightarrow C$ et que $C \Rightarrow A$. Montrer que $A \Leftrightarrow B$ et que $B \Leftrightarrow C$.

Exercice 3 *Implications, équivalences*

Pour chacune des propositions P et Q suivantes, indiquer si les assertions $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies.

$$P: \ \forall \varepsilon > 0, \ x \leq \varepsilon \qquad Q: \ x = 0$$

$$P: \ \forall \varepsilon > 0, \ |x| \leq \varepsilon \quad Q: \ x = 0$$

$$P: \ \forall \varepsilon \geq 0, \ |x| < \varepsilon \quad Q: \ x = 0.$$

Exercice 4 *Quantificateurs*

Soit $f : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ une application. On note (P) la proposition suivante:

$$\exists k \in [0, 1[\,, \ \forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, \ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

On note (Q) la proposition suivante:

$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, \ \exists k \in [0, 1[\,, \ |f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|\,.$$

On note enfin (R) la proposition:

$$\forall (x, y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2, \ x \neq y \Rightarrow |f(x) - f(y)| < |x - y|\,.$$

(a) Montrer que $(Q) \Leftrightarrow (R)$.
(b) Expliquer pourquoi $(P) \Rightarrow (Q)$.
(c) Montrer par un exemple que (Q) n'implique pas (P). On pourra prendre $f(t) = t^2$.

Exercice 5 *Négation, quantificateurs*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On note (P) l'assertion suivante:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

(a) Ecrire la négation de (P).

(b) Soit f la fonction partie entière (c'est-à-dire que $f(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x). Montrer que f ne vérifie pas (P).

Exercice 6 *Récurrence*

(a) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Remarque: la notation correcte de $1^3 + 2^3 + ... + n^3$ est

$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 3$, tout polygone convexe à n côtés possède $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales. On appelle diagonale d'un polygone convexe tout segment joignant deux sommets non consécutifs.

Exercice 7 *Contraposition*

Soient a, b, c des réels vérifiant $a > 0$. Montrer que si, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c > 0$, alors $b^2 - 4ac < 0$. On raisonnera par contraposition.

Exercice 8 *Raisonnement par l'absurde*

Montrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Exercice 9 *Petite réflexion*

Expliquer pourquoi la règle "toute règle possède une exception" se contredit elle-même.

M1 - TD n^0 2

Exercice 1 *Relations entre ensembles*

On considère E et F deux ensembles (inclus tous deux dans un autre ensemble Ω). Montrer que
- (a) $E \setminus F = E \cap F^c$;
- (b) $(E \setminus F)^c = E^c \cup (E \cap F)$;
- (c) $(E \cup F^c)^c = F \setminus E$.

Exercice 2 *Bijection de* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$

Montrer que la fonction $f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(p,q) = \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)+p$ est une bijection.

Exercice 3 *Fonctions hyperboliques réciproques*

Soit $f : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ la fonction définie par $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
- (a) Pour $y \in [1,\infty[$ quelconque, montrer qu'il existe un unique $X \in [1,+\infty[$ vérifiant $X^2 - 2yX + 1 = 0$.
- (b) En utilisant la question (a), montrer que pour tout $y \in [1,+\infty[$, il existe un unique $x \in [0,+\infty[$ tel que $\cosh x = y$. On pourra poser $X = e^x$.
- (c) En déduire que la fonction f est bijective. On note $f^{-1} = \text{argch}$.
- (d) Donner une expression de argch en fonction de ln.
- (e) Reprendre la même méthode pour montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \sinh x$ est bijective, ainsi que $h : \mathbb{R} \to]-1,1[$ définie par $h(x) = \tanh x$ et donner une expression des fonctions réciproques g^{-1} et h^{-1} en fonction de ln.

Exercice 4 *Bijections*

On considère E, F, G, et H quatre ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. On suppose que $g \circ f : E \to G$ et $h \circ g : F \to H$ sont bijectives.
- (a) Montrer que f et g sont injectives.
- (b) Montrer que g et h sont surjectives, et remarquer qu'alors g est bijective.
- (c) En déduire que f et h sont aussi bijectives.

Exercice 5 *Images directes d'unions et intersections*

Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application, A et B sont deux parties de E.
- (a) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
- (b) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
- (c) Montrer que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ si, et seulement si f est injective.

Exercice 6 *Ordre non total*

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.
- (a) Montrer que l'on définit bien une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$ en posant $A \leq B$ si, et seulement si $A \subset B$.
- (b) Montrer que si E est constitué d'au moins deux éléments, cet ordre $\leq$ n'est pas total sur $\mathcal{P}(E)$.
- (c) Donner, s'il existe, le plus petit élément de $\mathcal{P}(E)$, puis de $\mathcal{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$.

M1 - TD n^0 3

Exercice 1

Soit E un ensemble et $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On définit
$$A = \{x \in E;\ x \notin f(x)\}\,.$$
(a) Montrer qu'il n'existe pas de $x \in E$ tel que $f(x) = A$.
(b) En déduire que f n'est pas surjective.
(c) Dans le cas où E est fini, donner une autre démonstration de la question (b).

Exercice 2 *Facile*

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $F \subset E$. On suppose que F admet une borne supérieure a. Montrer que a est le plus grand élément de F si, et seulement si, $a \in F$.

Exercice 3

Soit $A = \big\{x \in \mathbb{R};\ x^2 < 2\big\}$. Montrer que A possède une borne supérieure et la calculer. L'ensemble A a-t-il un plus grand élément?

Exercice 4

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
(a) On note
$$A + B = \{x \in \mathbb{R};\ \exists a \in A,\ b \in B,\ x = a + b\}\,.$$
Montrer que $A + B$ est non vide et majoré, et que
$$\sup{(A + B)} = \sup A + \sup B.$$
(b) On note
$$AB = \{x \in \mathbb{R};\ \exists a \in A,\ b \in B,\ x = ab\}\,.$$
Montrer que, si $A \subset [0, +\infty[$ et $B \subset [0, +\infty[$, alors AB est non vide et majoré, et que
$$\sup{(AB)} = \sup A \sup B.$$
Donner un exemple de parties A et B de $\mathbb{R}$ non vides et majorées telles que AB ne soit pas majoré.

Exercice 5

Soit E un ensemble et $G \subset E \times E$. On définit
$$G^{-1} = \{(x, y) \in E \times E;\ (y, x) \in G\}\,.$$
De plus, si $G_1 \subset E \times E$ et $G_2 \subset E \times E$, on pose
$$G_2 \circ G_1 = \{(x, y) \in E \times E;\ \exists z \in E,\ (x, z) \in G_1 \text{ et } (z, y) \in G_2\}\,.$$
On note enfin
$$\Delta = \{(x, y) \in E \times E;\ y = x\}\,.$$
(a) On suppose que G est le graphe d'une relation d'équivalence sur E, c'est-à-dire qu'il existe une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur E telle que
$$(x, y) \in G \Leftrightarrow x\mathcal{R}y.$$
Montrer que
$$G \circ G^{-1} \circ G = G \text{ et } \Delta_E \subset G.$$
(b) Montrer réciproquement que, si
$$G \circ G^{-1} \circ G = G \text{ et } \Delta_E \subset G,$$
alors G est le graphe d'une relation d'équivalence sur E.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On cherche à définir une addition et une multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(a) Soient deux éléments C_1 et C_2 dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On choisit $k \in C_1$ et $l \in C_2$, et on définit $C = C_1 + C_2$ comme étant la classe d'équivalence de $k + l$. Vérifier que cette définition est correcte, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du choix de $k \in C_1$ et de $l \in C_2$.

(b) Procéder de manière analogue pour définir une multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

(c) Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$. A quelle condition sur k existe-t-il $l \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $\overline{k}\,\overline{l} = \overline{1}$?

Exercice 7

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note R_n le nombre de relations d'équivalence sur l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

(a) Montrer que, pour tout ensemble E de cardinal n, R_n est le nombre de relations d'équivalence sur E.

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k R_k.$$

Exercice 8

Soient E et F deux ensembles finis totalement ordonnés, de cardinal respectif p et n.

(a) Combien y a-t-il d'applications strictement croissantes de E dans F?

(b) Combien y a-t-il d'applications croissantes de E dans F?

Indication pour (b)**:** Si $f : E \to F$ est une application croissante, on peut lui associer une application strictement croissante de E dans un ensemble de cardinal $n + p$.

Exercice 9

Soit $(E, \leq)$ un ensemble ordonné. On dit que E est bien ordonné si, et seulement si, toute partie finie non vide de E possède un plus petit élément.

(a) Montrer que $\mathbb{N}$ (muni de l'ordre usuel) est bien ordonné, mais que $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ne le sont pas.

(b) Montrer que si E est bien ordonné, alors E est totalement ordonné.

(c) Montrer que si E est fini et totalement ordonné, alors E est bien ordonné.

(c) Montrer que si $(E, \leq)$ et $(E, \geq)$ sont bien ordonnés (ce qui signifie que toute partie finie non vide de E possède un plus petit et un plus grand élément), alors E est fini.

M1 - TD n^0 4

Exercice 1 *Suites classiques*

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = n^\alpha$.
  (i) Montrer que, si $\alpha > 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.
  (ii) Montrer que, si $\alpha < 0$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers 0.
  (iii) Quel est le comportement de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ si $\alpha = 0$?
(b) Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = a^n$.
  (i) Montrer que, si $a > 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
  (ii) Montrer que, si $|a| < 1$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
  (iii) Quel est le comportement de la suite si $a = 1$, si $a = -1$, si $a < -1$?
(c) Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \frac{a^n}{n^\alpha}$.
  (i) Montrer que si $|a| \leq 1$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite 0.
  (ii) Montrer que si $a > 1$, alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
  (iii) Que se passe-t-il lorsque $a < -1$?
(d) (i) Soit $\alpha \in]0, 1[$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \neq 0$ et $\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq \alpha$. Montrer qu'alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, de limite 0.
  (ii) Soit $a \in \mathbb{C}$. Appliquer le résultat précédent à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \frac{a^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(e) Soit $a > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_n = a^{1/n}$. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 1.

Exercice 2 *Suites adjacentes*

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux

$$u_n = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite que l'on notera ℓ.
(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, il existe $\lambda_n \in]0, 1[$ tel que $\ell = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!} + \frac{\lambda_n}{n \cdot n!}$. En déduire que ℓ n'est pas rationnel.

Exercice 3 *Le nombre e*

On définit le nombre e comme étant la limite ℓ de l'exercice 1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n \geq 1$.
(a) Développer $(1 + \frac{1}{n})^n$ ($n \geq 1$) par la formule du binôme.
(b) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p}\binom{n}{p} = \frac{1}{p!}$.
(c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$.

Exercice 4 *Moyenne de Césaro*

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (réelle ou complexe) convergente, de limite x. On définit la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $s_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_n$, $n \in \mathbb{N}$.
(a) On suppose dans cette question que $x = 0$. Écrire la définition de la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 et montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
(b) Montrer dans le cas général que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.
(c) Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, est-il vrai que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi ? On étudiera le cas où $x_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

(d) On suppose que les x_n sont réels et que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Montrer que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
(e) On suppose maintenant que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle monotone telle que $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers s.

Exercice 5

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels (ou de complexes) telle que les suites extraites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ.

(a) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ.
(b) Que se passe-t-il si les trois suites extraites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettent pas la même limite ?

Exercice 6 *Groupe de Klein*

On considère les quatre fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 définies sur $]0,+\infty[$ par $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{1}{x}$, $f_3(x)=-x$ et $f_4(x)=-\frac{1}{x}$. Soit $G=\{f_1,f_2,f_3,f_4\}$. On note $\circ$ la loi de composition des applications.

(a) Montrer que $\circ$ est une loi de composition interne sur G, associative et commutative.
(b) Déterminer l'élément neutre de $(G,\circ)$.
(c) Montrer que $(G,\circ)$ est un groupe commutatif.

Exercice 7 *Groupe diédral*

On appelle D_4 l'ensemble des isométries d'un plan affine euclidien qui conservent l'ensemble des sommets d'un carré.

(a) Montrer que l'ensemble D_4, muni de la loi de composition des applications, est un groupe d'ordre 8 non commutatif.
(b) Soit G un groupe quelconque d'ordre 8 engendré par deux éléments d'ordres 4 et 2 respectivement. Montrer que G est isomorphe à D_4.

Exercice 8 *Groupe et relation d'équivalence*

Soit $(G,*)$ un groupe non commutatif ; on note e l'élément neutre. On définit sur G la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y$ s'il existe $s\in G$ tel que $y=s*x*s'$ (s' désigne ici l'inverse de s par la loi $*$).

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G.
(b) Déterminer la classe de e par $\mathcal{R}$.

Exercice 9 *Racines nièmes de l'unité*

Soit $n\geq 1$ un entier.

(a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n=1$. On note U_n l'ensemble des solutions de cette équation.
(b) Déterminer un $\omega\in U_n$ tel que $U_n=\{1,\omega,\omega^2,\dots,\omega^{n-1}\}$.
(c) Montrer que la multiplication (notée $\cdot$) est une loi de composition interne associative et commutative sur U_n.
(c) Montrer que $(U_n,\cdot)$ est un groupe commutatif.
(d) Montrer qu'il existe une application linéaire bijective φ de $(U_n,\cdot)$ sur $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ telle que $\varphi(a\cdot b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ pour tout $a,b\in U_n$; φ est un isomorphisme de groupes.

M1 - TD n^0 5

Exercice 1

Soit A un nombre réel fixé.

(a) Montrer que, pour chaque entier $n \geq 0$, il existe un unique entier a_n tel que

$$\frac{a_n}{10^n} \leq A < \frac{a_n + 1}{10^n}.$$

(b) On pose pour $n = 0, 1, \ldots$ $u_n = \dfrac{a_n}{10^n}$ et $v_n = \dfrac{a_n + 1}{10^n}$. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

(c) Montrer que ces deux suites sont convergentes et donner leurs limites respectives.

Exercice 2

(a) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite x. Montrer que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\sigma_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kx_k$, $n \in \mathbb{N}$ converge vers $\frac{x}{2}$. Indication : somme des n premiers entiers.

(b) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $(a_{n+1} - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite notée ℓ. Montrer que la suite $(\frac{1}{n}\, a_n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite ℓ.

(c) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \geq 0$. Montrer que $\left(u_n^{\frac{1}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée si, et seulement si, on peut extraire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers $+\infty$.

Exercice 4

Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.

(a) Vérifier qu'on peut définir par récurrence deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et$(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$a_0 = a, \qquad b_0 = b,$$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \qquad b_{n+1} = (a_n b_n)^{\frac{1}{2}}.$$

(b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduire qu'elles ont même limite.

Exercice 5

(a) Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. Montrer que $l \in \mathbb{Z}$ et qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $q_n = l$.

(b) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels qui converge vers $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit

$$x_n = \frac{p_n}{q_n}, \quad p_n \in \mathbb{Z},\ q_n \in \mathbb{N}^*.$$

On suppose que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers $+\infty$.

(i) Montrer qu'on peut extraire de $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée, et que, de cette suite bornée, on peut extraire une suite convergente, qu'on notera $\left(q_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) En déduire que $x \in \mathbb{Q}$.

(iii) Conclure.

Exercice 6

Soit p un nombre premier et G un groupe d'ordre p. Quels sont les sous-groupes de G?

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que n n'est pas premier. Montrer qu'il existe un sous-groupe H de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ différent de $\{0\}$ et de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ et on définit

$$Z(\mathcal{S}_n) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n;\ \forall \tau \in \mathcal{S}_n,\ \tau \circ \sigma = \sigma \circ \tau\}\,.$$

(a) Montrer que $Id \in Z(\mathcal{S}_n)$.
(b) On suppose que $n \geq 3$ et on fixe $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer qu'il existe une permutation $\gamma \in \mathcal{S}_n$ telle que $\gamma(k) = k$ et $\gamma(i) \neq i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{k\}$.
(c) En déduire que, si $n \geq 3$, $Z(\mathcal{S}_n) = \{Id\}$.
(d) Que valent $Z(\mathcal{S}_1)$ et $Z(\mathcal{S}_2)$?

Exercice 9

Soient A et A' des anneaux. Si (x, x') et (y, y') sont dans $A \times A'$, on pose

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } (x, y).(x', y') = (xx', yy').$$

(a) Montrer que $(A \times A', +, .)$ est un anneau.
(b) On suppose A et A' intègres. L'anneau $A \times A'$ est-il intègre ?

Exercice 10

Soit A un anneau possédant un élément unité e. Si $x \in A$, on dit que x est nilpotent si, et seulement si, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^m = 0$.

(a) Soit $y \in A$. Montrer que, si y est nilpotent, alors $e - y$ est inversible.
(b) Soient x et y deux éléments nilpotents de A qui commutent. Montrer que $x + y$ est encore nilpotent. Est-ce encore vrai si x et y ne commutent pas ?

Exercice 11

Soit $A = \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists a, b \in \mathbb{Q}\ :\ x = a + b\sqrt{2}\right\}$. Montrer que $(A, +, \cdot)$ est un corps.

Exercice 12

Soit A un anneau intègre fini. Montrer que A est un corps.

M1 - TD n^0 6

Exercice 1

(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe une unique racine de l'équation $x^n + x - 1 = 0$ (notée u_n) dans l'intervalle $]0, 1[$.

(b) Pour $n \geq 2$, on pose $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = x^n + x - 1$. Montrer que $f_n(u_{n+1}) \geq f_n(u_n)$ et en déduire que $u_{n+1} \geq u_n$.

(c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

(d) Montrer par l'absurde que $\ell = 1$.

Exercice 2

(a) Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x$ est un morphisme du corps $(\mathbb{R}, +, .)$ dans lui-même.

(b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même. On pose $\alpha = f(1)$.

  (i) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = \alpha n$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = \alpha n$.

  (ii) Soit $r \in \mathbb{Q}$. En écrivant $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et en calculant $f(p)$ de deux manières, prouver que $f(r) = \alpha r$.

  (iii) On suppose de plus que f est croissante. Montrer que $f(x) = \alpha x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ dans lui-même. On pose $\alpha = f(1)$. On suppose que f est continue en 0.

  (i) Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

  (ii) En utilisant le résultat de la question (b) (ii) et l'exercice 1 du TD5, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \alpha x$.

(d) Soit maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un morphisme du corps $(\mathbb{R}, +, .)$ dans lui-même.

  (i) Prouver que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ (utiliser $\sqrt{x}$). En déduire que f est croissante.

  (ii) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

(e) Déterminer les automorphismes de corps continus de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 3

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(r) = g(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (on pourra s'aider de l'exercice 1 du TD5).

Exercice 4

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to -1} f(x) = a$ et vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(2x + 1) = f(x)$.

(a) On pose $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = \frac{1}{2}\,(t - 1)$. Si g^n désigne la composée de g avec lui-même n fois, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $g^n(t) = \frac{t}{2^n} - (\frac{1}{2} + \dots \frac{1}{2^n})$.

(b) Montrer par récurrence, en utilisant la relation vérifiée par f, que $f(g^n(t)) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(g^n(t))_{n\geq 1}$ est une suite convergente de limite -1.

(d) Déduire de (b) et (c) que $f(t) = a$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit $p \geq 3$ un entier premier. On note $F_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $F_p^* = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$.

(a) Montrer que $\varphi : (F_p^*, \cdot) \to (F_p^*, \cdot)$ défini par $\varphi(u) = u^2$ est un homomorphisme de groupes.

(b) Montrer que $\ker \varphi = \{-1, 1\}$. En déduire que card(Im φ) $= \frac{p-1}{2}$. On pourra factoriser φ comme dans le cours (factorisation des homomorphismes de groupes).

(c) Montrer que pour tout $x \in \text{Im } \varphi$, on a $x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

(d) Montrer que si -1 est un carré dans F_p, alors $p \equiv 1 \mod 4$.

(e) Supposons qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à $1 \mod 4$. On note n le plus grand d'entre eux. Soit p un nombre premier qui divise $(n!)^2 + 1$.

  (i) Montrer que $p \geq n + 1$.

(ii) Montrer que la classe de $n!$ dans F_p au carré vaut -1, et donc que -1 est un carré dans F_p.

(iii) Montrer alors que $p \equiv 1 \mod 4$.

(iv) Que peut-on en déduire ?

Exercice 6

(a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$.

(i) Montrer que $|\frac{u_n}{n!} - 1| \leq \frac{2}{n}$.

(ii) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers ∞.

(b) Soit $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

(i) Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$.

(ii) En déduire que $2(\sqrt{n+1} - 1) \leq v_n \leq 2\sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$.

(iii) Déterminer un équivalent de v_n lorsque n tend vers ∞.

M1 - TD n^0 7

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \mathbb{Z}$. Montrer que f est constante.

Exercice 2

Soient $a < b$ des réels et f une fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$. Montrer que f a un point fixe (c'est-à-dire qu'il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = x$.)

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq f(a)$.

Exercice 4

(a) Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$ tel que $f(x) = f(x + \frac{1}{k})$.

(b) Soit $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$. On définit, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(t) = t - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi t}{\alpha}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}.$$

Vérifier que $f(0) = f(1)$ mais que, pour tout $t \in [0, 1 - \alpha]$, $f(t) \neq f(t + \alpha)$.

Exercice 5

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x+\sqrt{2}) = f(x)$. On définit

$$A = \left\{x \in \mathbb{R};\ \exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2,\ x = a + b\sqrt{2}\right\}.$$

(a) Prouver que, pour tout $x \in A$,

$$f(x) = f(0).$$

(b) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $(\sqrt{2} - 1)^n \in A$.

(c) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers x.

(d) Conclure que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

Soit f une application continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x + 1) - f(x)) = l.$$

Montrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = l.$$

On commencera par le cas $l = 0$.

Exercice 7

Trouver toutes les fonctions continues f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tous x et $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x)f(y).$$

Exercice 8

Déterminer tous les sous-corps de $\mathbb{Q}$.

Exercice 9

Soit p un nombre premier.

(a) Montrer que, pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq p-1$, p divise C_p^k.

(b) En déduire que l'application f de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ définie par $f(x) = x^p$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un morphisme de corps.

(c) Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $f(x) = x$. Quel théorème retrouve-t-on ?

Exercice 10

Soit K un corps commutatif et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K. On définit par récurrence la suite de polynômes $(A_n)_{n\geq 1}$ par

$$A_1 = a_0X + a_1,\ A_{n+1} = A_nX + a_{n+1}.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{n-k}.$$

En déduire un algorithme de calcul de la valeur prise par une fonction polynôme en un point.

Exercice 11

Soient

$$A = X^4 + aX^2 + bX + c,\ B = X^2 + X + 1$$

des polynômes à coefficients complexes. Effectuer la division euclidienne de A par B. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que B divise A.

Exercice 12

Soit $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Effectuer la division euclidienne de $A = \overline{2}X^3 + \overline{3}X^2 + \overline{1}$ par $B = X^2 + \overline{2}X + \overline{3}$.

Exercice 13

Soit K un corps commutatif et $p \in \mathbb{N}^*$. On considère un polynôme

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K\left[X\right].$$

Pour tout k entre 0 et n, on note r_k le reste de la division euclidienne de k par p. Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $X^p - 1$ est

$$R = \sum_{k=0}^{n} a_k X^{r_k}.$$

Exercice 14 *Avec aspirine*

Soit A un anneau possédant un élément unité. On suppose que, pour tous x, y dans A,

$$(xy)^2 = x^2y^2.$$

Montrer que A est commutatif.
Indication: comparer $(1+x)^2y^2$ et $\left((1+x)y\right)^2$ ainsi que $y^2(1+x)^2$ et $\left(y(1+x)\right)^2$. En déduire que $x^2y = xyx = yx^2$. Conclure en comparant $(1+x)^2(1+y)^2$ et $\left((1+x)(1+y)\right)^2$.

M1 - TD n^0 8

Exercice 1

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ continue telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Montrer que pour tout $a \geq 0$, il existe $b \geq a$ tel que $f(b) \geq f(t)$ pour tout $t \in [a, +\infty[$.

Exercice 2

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. On dit qu'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $t \in [0, 1]$, on a $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ pour tout $x, y \in [a, b]$.

(a) (i) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x-2)^2$ si $x \geq 0$ et $f(x) = f(-x)$ si $x \leq 0$. Montrer que f est convexe sur $[0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0]$, mais pas sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(ii) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ soit convexe sur $[0, +\infty[$ et concave (c'est-à-dire que $-f$ est convexe) sur $]-\infty, 0]$.

(b) Soit f une fonction convexe sur $[a, b]$.

(i) Montrer que pour tout $c \in]a, b[$, on a

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}.$$

(ii) Montrer que pour tout $[\alpha, \beta] \subset]a, b[$, il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in [\alpha, \beta]$, $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

(c) Soit f une fonction continue telle que $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(y))$ pour tout $x, y \in [a, b]$. Montrer que f est convexe.

(d) On suppose que f est convexe et que, de plus, elle est strictement croissante sur $[a, b]$. Montrer que f^{-1}, l'application réciproque de f, est convexe. Que se passe-t-il si f est strictement décroissante sur $[a, b]$?

Exercice 3

(a) Montrer que les deux fonctions $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto 1 - t$ vérifient $|f(s) - f(t)| \geq |s - t|$ pour tout $s, t \in [0, 1]$.

(b) Trouver toutes les fonctions $f : [0, 1] \to [0, 1]$ vérifiant $|f(s) - f(t)| \geq |s - t|$ pour tout $s, t \in [0, 1]$.

Exercice 4

Soit $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \arctan u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente dont on déterminera la limite.

Exercice 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

(a) $2 \arcsin x = \arcsin(2x\sqrt{1 - x^2})$;

(b) $\arctan(x - 1) + \arctan x + \arctan(x + 1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 6

On cherche les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ qui vérifient $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$ et $P(0) = 0$.

(a) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ pour $n \geq 0$. Montrer que cette suite est strictement croissante.

(b) Montrer que si P est une solution du problème, alors $P(a_n) = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire que la seule solution au problème est $P(X) = X$.

Exercice 7

On cherche les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X + 1)$.

(a) Montrer que les seules solutions constantes sont les deux polynômes constants 0 et 1.

(b) Soit P un polynôme solution non constant. Montrer que le coefficient du terme de plus haut degré de P vaut 1.

(c) Soit P une solution telle que $\deg P \geq 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ un zéro de P.

(i) Montrer qu'alors α^2 et $(\alpha-1)^2$ sont des zéros de P.

(ii) Montrer par récurrence que α^{2^n} et $(\alpha-1)^{2^n}$ sont des zéros de P pour tout $n \geq 1$.

(iii) En déduire que nécessairement $\alpha \in \{0, 1, -j, -j^2\}$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

(iv) En notant $P(X) = X^p(X-1)^q(X+j)^r(X+j^2)^s$ et en utilisant la relation vérifiée par P, montrer que $p = q$ et $r = s = 0$.

(v) En déduire tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui vérifient $P(X^2) = P(X)P(X+1)$.

M1 - Devoir n^0 1

A rendre au plus tard le 27 octobre 2000

Exercice 1

Soient E, F, G des ensembles, $f : E \to F$ et $g : E \to G$ des applications.

(a) On suppose qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$. Montrer que

$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y). \tag{1}$$

(b) On suppose maintenant que f et g vérifient la condition (1). Montrer qu'il existe une application $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$. Montrer de plus que si f est surjective, alors h est unique.

(c) Enoncer le théorème ainsi prouvé.

Exercice 2

Soient E et F deux ensembles ordonnés, dont on note $\leq$ les relations d'ordre. Si $f : E \to F$ est une application, on dit que f est décroissante sur E si, et seulement si,

$$\forall (x_1, x_2) \in E^2,\ x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1).$$

On considère $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des applications décroissantes. On suppose également que

$$\forall x \in E,\ x \leq g\left(f(x)\right),$$

$$\forall y \in F,\ y \leq f\left(g(y)\right).$$

Montrer alors que $f \circ g \circ f = f$ et que $g \circ f \circ g = g$.

Indication: Pour prouver que $f \circ g \circ f = f$, on montrera que

$$\forall x \in E,\ (f \circ g \circ f)(x) \leq f(x) \text{ et } f(x) \leq (f \circ g \circ f)(x).$$

Exercice 3

Soit $f : E \to F$ une application.

(a) On suppose f surjective. Montrer que

$$\forall G \subset F,\ f\left(f^{-1}(G)\right) = G.$$

(b) On ne suppose plus f surjective. Montrer que

$$\forall G \subset F,\ f\left(f^{-1}(G)\right) = G \cap f(E).$$

Exercice 4 *Différence symétrique*

Soient E, F et G trois ensembles. On définit la différence symétrique $E \Delta F$ par

$$E \Delta F = (E \cup F) \setminus (E \cap F).$$

(a) Si E est un ensemble quelconque, que vaut $E \Delta E$? Que vaut $E \Delta \emptyset$?

(b) Montrer que $E \Delta F = F \Delta E$.

(c) Prouver que $E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$. En déduire que $E \Delta F$ est l'ensemble des éléments de $E \cup F$ qui appartiennent à un et un seul des ensembles E et F.

(d) Calculer $1\!\!1_{E \Delta F}$ en fonction de $1\!\!1_E$ et de $1\!\!1_F$.

(e) Montrer que $(E \Delta F) \Delta G = E \Delta (F \Delta G)$. On note alors $E \Delta F \Delta G = (E \Delta F) \Delta G$. Expliquer pourquoi $E \Delta F \Delta G$ est l'ensemble des éléments de $E \cup F \cup G$ qui appartiennent soit à exactement un des ensembles E, F, G, soit aux trois à la fois.

(f) Si $E_1, \ldots, E_n$ sont n ensembles ($n \in \mathbb{N}^*$), comment définir $E_1 \Delta E_2 \Delta \ldots \Delta E_n$, et comment décrire cet ensemble ? On s'inspirera de la question (d).

M1 - Corrigé du devoir n^0 1

Exercice 1

(a) Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors
$$g(x) = h\left(f(x)\right) = h\left(f(y)\right) = g(y).$$

(b) Soit $y \in F$.
Si $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On définit alors $h(y) = g(x)$. On vérifie que cette définition est indépendante du choix de x. En effet, si $y = f(x) = f(x')$ avec $x, x' \in E$, alors, par hypothèse, $g(x) = g(x')$.
On fixe un élément $z \in G$ quelconque. Si $y \notin f(E)$, on définit $h(y) = z$.
On a alors $g = h \circ f$. En effet, soit $x \in E$. On a $f(x) \in f(E)$, donc, par définition de h, $h\left(f(x)\right) = g(x)$.
On suppose f surjective. Soient h_1 et h_2 des applications de F dans G telles que $g = h_1 \circ f = h_2 \circ f$. Si $y \in F$, comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On a donc
$$h_1(y) = h_1\left(f(x)\right) = g(x)$$
et
$$h_2(y) = h_2\left(f(x)\right) = g(x),$$
ce qui montre que $h_1 = h_2$. Il existe donc une unique application $h : F \to G$ vérifiant $g = h \circ f$.

(c) On a donc prouvé ceci:
Soient E, F, G des ensembles et $f : E \to F$ et $g : E \to G$ des applications. Alors il existe $h : F \to G$ telle que $g = h \circ f$ si, et seulement si,
$$\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow g(x) = g(y).$$
Si de plus f est surjective, une telle application h est unique.

Exercice 2

Montrons que $f \circ g \circ f = f$. Soit $x \in E$. Par hypothèse, $x \leq g\left(f(x)\right)$. Comme f est décroissante sur E, on obtient que
$$f\left(g\left(f(x)\right)\right) \leq f(x).$$
De plus, toujours par hypothèse, on a, pour tout $y \in E$, $y \leq f\left(g(y)\right)$. En appliquant cette inégalité avec $y = f(x)$, on obtient que
$$f(x) \leq f\left(g\left(f(x)\right)\right).$$
On a donc montré que, pour tout $x \in E$,
$$\left(f \circ g \circ f\right)(x) \leq f(x) \leq \left(f \circ g \circ f\right)(x).$$
L'antisymétrie de la relation d'ordre $\leq$ permet de conclure que
$$\left(f \circ g \circ f\right)(x) = f(x).$$
On raisonne de la même manière pour prouver que $g \circ f \circ g = g$.

Exercice 3

(a) Soit $y \in f\left(f^{-1}(G)\right)$. Il existe donc $x \in f^{-1}(G)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(G)$, on a $f(x) \in G$, ce qui veut dire que $y \in G$. On a donc prouvé que $f\left(f^{-1}(G)\right) \subset G$. Remarquer qu'on n'a pas utilisé la surjectivité de f ici.
Soit maintenant $y \in G$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in G$, $x \in f^{-1}(G)$, ce qui implique que $y \in f\left(f^{-1}(G)\right)$. On a donc prouvé l'inclusion $G \subset f\left(f^{-1}(G)\right)$ et, finalement, l'égalité annoncée.

(b) On a vu dans la question (a) que $f\left(f^{1}(G)\right) \subset G$. De plus, $f^{-1}(G) \subset E$ donc $f\left(f^{-1}(G)\right) \subset f(E)$. Ces deux inclusions montrent que $f\left(f^{-1}(G)\right) \subset G \cap f(E)$.

Soit maintenant $y \in G \cap f(E)$. Comme $y \in f(E)$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in G$, $x \in f^{-1}(G)$. On a donc bien $y \in f\left(f^{-1}(G)\right)$. L'égalité annoncée a donc bien lieu.

Remarquer qu'en appliquant le résultat de (b) au cas où f est surjective, on retrouve le résultat de (a), puisque $f(E) = F$.

Exercice 4

(a) Par définition,
$$E\Delta E = (E \cup E) \setminus (E \cap E) = E \setminus E = \emptyset$$
et
$$E\Delta\emptyset = (E \cup \emptyset) \setminus (E \cap \emptyset) = E \setminus \emptyset = E.$$

(b) Comme $E \cup F = F \cup E$ et $E \cap F = F \cap E$, on obtient aussitôt que $E\Delta F = F\Delta E$.

(c) Soit $E \in E\Delta F$. Déjà, $x \in E \cup F$. On suppose que $x \in E$. Comme $x \notin E \cap F$, on voit que $x \notin F$, ce qui signifie que $x \in E \setminus F$. De même, si $x \in F$, on montre que $x \in F \setminus E$. Ainsi, $x \in (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.
Soit maintenant $x \in (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$. Comme $E \setminus F \subset E$ et $F \setminus E \subset F$, $x \in E \cup F$. De plus, si $x \in E$, $x \notin F$, et si $x \in F$, $x \notin E$. Dans les deux cas, $x \notin E \cap F$. Finalement, $x \in (E \cup F) \setminus (E \cap F)$. On a donc prouvé que $E\Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E)$.

Cette égalité montre que $E\Delta F$ est formé de la réunion des éléments qui appartiennent à E sans appartenir à F et des éléments qui appartiennent à F sans appartenir à E, c'est-à -dire des éléments de $E \cup F$ qui appartiennent à exactement un des ensembles E et F (et pas aux deux à la fois).

(d) On considère E et F comme des sous-ensembles d'un même ensemble Ω. Alors
$$\mathbb{1}_{E\Delta F} = \left|\mathbb{1}_E - \mathbb{1}_F\right|.$$
En effet, si $x \in E \setminus F$, $\mathbb{1}_{E\Delta F}(x) = 1$, $\mathbb{1}_E(x) = 1$ et $\mathbb{1}_F(x) = 0$. On raisonne de même si $x \in F \setminus E$.
Si $x \notin E\Delta F$, ou bien $x \in E \cap F$, et dans ce cas $\mathbb{1}_{E\Delta F}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_E(x) = \mathbb{1}_F(x) = 1$, ou bien $x \notin E \cup F$, et dans ce cas, $\mathbb{1}_{E\Delta F}(x) = 0$ et $\mathbb{1}_E(x) = \mathbb{1}_F(x) = 0$.
Dans tous les cas, l'égalité $\mathbb{1}_{E\Delta F}(x) = |\mathbb{1}_E(x) - \mathbb{1}_F(x)|$ a bien lieu.

(e) On remarque que
$$x \notin E\Delta F \Leftrightarrow (x \notin E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in E \text{ et } x \in F).$$
Par suite, on peut écrire
$$\begin{aligned} x \in (E\Delta F)\Delta G \quad &\Leftrightarrow \quad x \in (E\Delta F) \setminus G \text{ ou } x \in G \setminus (E\Delta F) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in E \text{ et } x \notin F \text{ et } x \notin G) \text{ ou } (x \in F \text{ et } x \notin E \text{ et } x \notin G) \\ &\text{ou} \quad (x \in G \text{ et } x \notin E \text{ et } x \notin F) \text{ ou } (x \in G \text{ et } x \in E \text{ et } x \in F). \end{aligned}$$
En d'autres termes,
$$(E\Delta F)\Delta G = (E \setminus (F \cup G)) \cup (F \setminus (E \cup G)) \cup (G \setminus (E \cup F)) \cup (E \cap F \cap G).$$
Cette description montre que $(E\Delta F)\Delta G$ est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent:
ou bien à E mais ni à F ni à G,
ou bien à F mais ni à E ni à G,
ou bien à G mais ni à E ni à F,

ou bien à E, à F et à G.

Comme $E\Delta(F\Delta G) = (F\Delta G)\Delta E$, on obtient que $E\Delta(F\Delta G)$ est composé exactement des mêmes éléments que $(E\Delta F)\Delta G$. Cet ensemble se note $E\Delta F\Delta G$ et la description qu'on vient d'en donner montre qu'il est formé des éléments qui appartiennent soit à exactement un des ensembles E, F et G, soit aux trois simultanément.

(f) On définit la différence symétriques de n ensembles par récurrence sur $n \geq 1$:

si $n = 1$, la différence symétrique de E est E,

si on a défini la différence symétrique de n ensembles et si $E_1, \ldots, E_{n+1}$ sont $n+1$ ensembles, on définit leur différence symétrique $E_1\Delta \ldots \Delta E_{n+1}$ par

$$E_1\Delta \ldots \Delta E_{n+1} = (E_1\Delta \ldots \Delta E_n)\, \Delta E_{n+1}.$$

L'associativité de Δ (question (e)) et sa commutativité (question (b)) montrent que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous ensembles $E_1, \ldots, E_n$ et toute bijection σ de $\{1, \ldots, n\}$ sui lui-même,

$$E_{\sigma(1)}\Delta \ldots \Delta E_{\sigma(n)} = E_1\Delta \ldots \Delta E_n.$$

On montre aussi par récurrence sur n que $E_1\Delta \ldots \Delta E_n$ est l'ensemble des éléments de $E_1 \cup \ldots \cup E_n$ qui appartiennent à exactement un nombre impair d'ensembles $E_1, \ldots, E_n$.

M1 - Devoir n^0 2

A rendre au plus tard le 10 novembre 2000

Problème

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs. On définit à partir de cette suite $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de la manière suivante

$$x_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}}}, \quad n \geq 1.$$

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ la suite associée à une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ la suite associée à une suite $(b_n)_{n\geq 1}$. Supposons que $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$. Montrer alors que $x_n \leq y_n$ pour tout $n \geq 1$.

2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

3. On suppose dans cette question que $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

- (a) Déterminer la racine positive, que l'on notera ω, de l'équation du second degré $X^2 - X - 1 = 0$.
- (b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifie $x_{n+1}^2 = 1 + x_n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $\omega^2 - x_{n+1}^2 = \omega - x_n$ (on pourra écrire $1 = \omega^2 - \omega$).
- (c) Montrer par récurrence que $x_n \leq \omega$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
- (d) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

4. On suppose dans cette question qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $a_n \leq \lambda^{(2^n)}$ pour tout $n \geq 1$.

- (a) On pose $b_n = a_n\lambda^{-(2^n)}$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que $0 \leq b_n \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et que la suite associée (comme dans l'énoncé) à $(b_n)_{n\geq 1}$ est $(\frac{1}{\lambda}\, x_n)_{n\geq 1}$.
- (b) En utilisant les résultats des questions 1 et 3, montrer que la suite $(\frac{1}{\lambda}\, x_n)_{n\geq 1}$ est convergente. En déduire alors que $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

5. On suppose maintenant qu'il existe $\lambda > 1$ et $\alpha > 2$ tels que $a_n \geq \lambda^{(\alpha^n)}$ pour une infinité de valeurs de n.

- (a) Soit $n_0 \geq 1$ tel que $a_{n_0} \geq \lambda^{(\alpha^{n_0})}$. En minorant a_k par 0 pour $1 \leq k \leq n_0 - 1$, montrer que $x_{n_0} \geq \lambda^{(\frac{\alpha}{2})^{n_0}}$.
- (b) En déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ n'est pas majorée, et donc divergente.

6. Étudier successivement les cas

- (a) $a_n = n$, $n \geq 1$;
- (b) $a_n = n!$, $n \geq 1$;
- (c) $a_n = n^n$, $n \geq 1$.

Exercice

Soit $G = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On définit $*$ sur G par $(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$, pour $(a, b) \in G$ et $(c, d) \in G$.

- (a) Montrer que $*$ ainsi définie est une loi de composition interne dans G, associative et commutative.
- (b) Déterminer l'élément neutre de $(G, *)$.
- (c) (i) Montrer que $(0, 0)$ n'est pas inversible pour la loi $*$.
  - (ii) Montrer que si $(a, b) \in G \setminus \{(0, 0)\}$, alors (a, b) est inversible et son inverse est donné par $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$.
- (d) En déduire que $(G \setminus \{(0, 0)\}, *)$ est un groupe commutatif.

M1 - Corrigé du devoir n^0 2

Exercice

(a) Il est facile de vérifier que si $(a,b) \in G$ et $(c,d) \in G$, alors $(a,b)*(c,d) \in G$ d'après la définition de $*$. De même, on voit facilement que $(a,b)*(c,d) = (c,d)*(a,b)$. Ainsi, $*$ est une loi de composition interne commutative. Il reste à vérifier que $*$ est associative. On a, pour $(a,b) \in G$, $(c,d) \in G$ et $(e,f) \in G$:

$$\begin{aligned}
((a,b)*(c,d))*(e,f) &= (ac-bd, ad+bc)*(e,f) \\
&= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e) \\
&= (a(ce-df)-b(de+cf), a(cf+de)+b(-df+ce)) \\
&= (a,b)*(ce-df, cf+de) \\
&= (a,b)*((c,d)*(e,f)).
\end{aligned}$$

Ainsi, la loi $*$ est associative.

(b) L'élément $(1,0)$ est dans G et on a pour tout $(a,b) \in G$: $(a,b)*(1,0) = (a,b) = (1,0)*(a,b)$ (immédiat). Ainsi $(1,0)$ est l'élément neutre de G pour $*$.

(c) (i) On a, pour tout $(a,b) \in G$: $(a,b)*(0,0) = (0,0)$. Donc il n'existe pas de $(a,b) \in G$ tel que $(a,b)*(0,0) = (1,0)$. Ainsi, $(0,0)$ n'admet pas d'inverse dans G pour la loi $*$.

(ii) Pour $(a,b) \in G \setminus \{(0,0)\}$, on a : $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) \in G \setminus \{(0,0)\}$ et

$$\begin{aligned}
(a,b)*\left(\frac{a}{a^2+b^2}\,,\,\frac{-b}{a^2+b^2}\right) &= \left(a\,\frac{a}{a^2+b^2} - b\,\frac{-b}{a^2+b^2}\,,\; a\,\frac{-b}{a^2+b^2} + b\,\frac{a}{a^2+b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\,,\,\frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right) \\
&= (1,0).
\end{aligned}$$

Ainsi, comme $*$ est commutative, $(a,b)*(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}) = (\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})*(a,b) = (1,0)$ et donc $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ est l'inverse de $(a,b) \in G \setminus \{(0,0)\}$ pour la loi $*$.

(d) On a vu que $*$ est une loi de composition interne associative et commutative sur G, que tout élément de $G \setminus \{(0,0)\}$ admet un inverse dans $G \setminus \{(0,0)\}$. Pour montrer que $(G \setminus \{(0,0)\}, *)$ est un groupe commutatif, il suffit de montrer que $*$ est une loi de composition interne sur $G \setminus \{(0,0)\}$, c'est-à-dire que si $(a,b) \in G \setminus \{(0,0)\}$ et $(c,d) \in G \setminus \{(0,0)\}$, alors $(a,b)*(c,d) \in G \setminus \{(0,0)\}$. En effet, supposons que $(a,b)*(c,d) = (0,0)$. Alors on a $ac-bd = 0$ et $ad+bc = 0$. En multipliant la deuxième égalité par c et en utilisant la première égalité, on obtient $b(c^2+d^2) = 0$. Ainsi, si $b \neq 0$, nécessairement $c = d = 0$. Et si $b = 0$, alors $ac = 0$ et $ad = 0$, ce qui implique soit que $a = 0$, soit que $c = d = 0$. Dans tous les cas, si $(a,b)*(c,d) = (0,0)$, alors $(a,b) = (0,0)$ ou $(c,d) = (0,0)$. Ce qui démontre (par contraposée) que si $(a,b) \in G \setminus \{(0,0)\}$ et $(c,d) \in G \setminus \{(0,0)\}$, alors $(a,b)*(c,d) \in G \setminus \{(0,0)\}$.
Ainsi, $(G \setminus \{(0,0)\}, *)$ est un groupe commutatif.

Problème

1. Montrons par récurrence la propriété $P(n)$ suivante :
pour $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ des $n-$uplets de réels positifs tels que $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a

$$\sqrt{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_2 + \ldots + \sqrt{\alpha_{n-1} + \sqrt{\alpha_n}}}} \leq \sqrt{\beta_1 + \sqrt{\beta_2 + \ldots + \sqrt{\beta_{n-1} + \sqrt{\beta_n}}}}$$

• $P(1)$ est vraie : si $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$ alors $\sqrt{\alpha_1} \leq \sqrt{\beta_1}$.
• Supposons que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 1$. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie. On considère donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$ des $(n+1)-$uplets de réels positifs tels que

$\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n+1$. Posons $\alpha'_i = \alpha_{i+1}$ et $\beta'_i = \beta_{i+1}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. D'après l'hypothèse de récurrence $P(n)$, on a :

$$\sqrt{\alpha'_1 + \sqrt{\alpha'_2 + \ldots + \sqrt{\alpha'_{n-1} + \sqrt{\alpha'_n}}}} \leq \sqrt{\beta'_1 + \sqrt{\beta'_2 + \ldots + \sqrt{\beta'_{n-1} + \sqrt{\beta'_n}}}}.$$

Comme $0 \leq \alpha_1 \leq \beta_1$, on en déduit :

$$\alpha_1 + \sqrt{\alpha'_1 + \sqrt{\alpha'_2 + \ldots + \sqrt{\alpha'_{n-1} + \sqrt{\alpha'_n}}}} \leq \beta_1 + \sqrt{\beta'_1 + \sqrt{\beta'_2 + \ldots + \sqrt{\beta'_{n-1} + \sqrt{\beta'_n}}}},$$

ce qui implique, en prenant la racine carrée de l'expression ci-dessus (les termes de l'inégalité sont positifs) :

$$\sqrt{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_2 + \ldots + \sqrt{\alpha_n + \sqrt{\alpha_{n+1}}}}} \leq \sqrt{\beta_1 + \sqrt{\beta_2 + \ldots + \sqrt{\beta_n + \sqrt{\beta_{n+1}}}}}.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
On peut ainsi appliquer $P(n)$ aux $n-$uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ pour obtenir $x_n \leq y_n$ et ce, pour tout $n \geq 1$.

2. On utilise encore le résultat démontré par récurrence dans la question précédente. On veut montrer que pour tout $n \geq 1$, $x_{n+1} \geq x_n$. Soit donc $n \geq 1$ fixé. On pose $\alpha_i = a_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\beta_i = a_i$ si $1 \leq i \leq n-1$, $\beta_n = a_n + \sqrt{a_{n+1}}$. Ainsi, on a $\alpha_i \leq \beta_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On applique alors le résultat précédent $P(n)$ aux $n-$uplets $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ pour obtenir $x_{n+1} \geq x_n$.

3. $a_n = 1$ pour tout $n \geq 1$.

(a) On résout $X^2 - X - 1 = 0$ comme une équation du second degré. Comme le Δ associé à cette équation ($\Delta = 5$) est strictement positif, on a deux racines réelles distinctes $X_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ et $X_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Comme $\sqrt{5} > 2$, seule X_2 est positive. Ainsi, on a trouvé $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) > 0$ la seule racine positive de $X^2 - X - 1 = 0$.

(b) Soit $n \geq 1$ fixé. Alors on a $x_{n+1}^2 = a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}}$. Comme dans cette question $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a_{n+1}$, on a

$$\sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n + \sqrt{a_{n+1}}}} = \sqrt{a_1 + \ldots + \sqrt{a_{n-1} + \sqrt{a_n}}} = x_n.$$

Comme de plus $a_1 = 1$, on a finalement $x_{n+1}^2 = 1 + x_n$, et ceci pour tout $n \geq 1$.
Comme d'après (a) $\omega^2 - \omega = 1$ on a, pour tout $n \geq 1$, $x_{n+1}^2 = \omega^2 - \omega + x_n$, c'est-à-dire $\omega^2 - x_{n+1}^2 = \omega - x_n$.

(c) Soit $n \geq 1$. On note $P(n)$ la proposition suivante : $x_n \leq \omega$.
• $P(1)$ est vraie. En effet, comme $\sqrt{5} > 2$, on a $\omega > \frac{3}{2} \geq 1 = x_1$.
• Supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geq 1$. Alors on a d'après la question (b) : $\omega^2 - x_{n+1}^2 = \omega - x_n, \geq 0$ d'après $P(n)$. Ainsi, $\omega^2 \geq x_{n+1}^2$. Comme $x_{n+1} \geq 0$ et comme la racine carrée est une fonction croissante de $\mathbb{R}^+$, on a $\omega \geq x_{n+1}$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
On a vu dans la question **2.** que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ était croissante et d'après ce qui précède, elle est majorée (par ω). On en déduit donc que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente.

(d) On pose $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Alors on a, en considérant le produit de deux suites convergentes $(x_{n+1})_{n\geq 1}$ et $(x_{n+1})_{n\geq 1}$: $x^2 = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}^2$. D'après la première égalité du (b) et l'unicité de la limite d'une suite convergente, on a $x^2 = 1 + x$. Comme de plus $x \geq 0$ (car la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est positive), d'après la question (a), on a $x = \omega$.

4. Soit $\lambda > 0$ et $a_n \leq \lambda^{(2^n)}$ pour tout $n \geq 1$.

(a) Soit $b_n = a_n \lambda^{-(2^n)}$, $n \geq 1$. Alors on a pour tout $n \geq 1$:

$$0 \leq b_n = a_n \lambda^{-(2^n)} \leq \lambda^{(2^n)} \lambda^{-(2^n)} = 1.$$

D'autre part, soit $(y_n)_{n\geq 1}$ la suite associée à la suite $(b_n)_{n\geq 1}$. On va montrer que pour tout $n \geq 1$, $y_n = \frac{1}{\lambda}\ x_n$. Pour cela, on considère d'abord le résultat annexe suivant que l'on montre par récurrence.

Pour $n \geq 1$, on note $P(n)$ la proposition :
pour tout $n-$uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de réels positifs, on a

$$\sqrt{\beta_1 + \sqrt{\beta_2 + \ldots + \sqrt{\beta_{n-1} + \sqrt{\beta_n}}}} = \frac{1}{\lambda}\ \sqrt{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_2 + \ldots + \sqrt{\alpha_{n-1} + \sqrt{\alpha_n}}}}$$

avec $\beta_k = \alpha_k \lambda^{-(2^k)}$ pour tout $k = 1, \ldots, n$.
• $P(1)$ est vraie. En effet, on a

$$\sqrt{\beta_1} = \sqrt{\alpha_1 \lambda^{-(2^1)}} = \sqrt{\alpha_1}\sqrt{\lambda^{-2}} = \sqrt{\alpha_1}\ \frac{1}{\lambda}.$$

• Supposons que $P(n)$ est vraie pour un $n \geq 1$. On veut montrer que $P(n+1)$ est vraie. Soit donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ un $(n+1)-$uplet de réels positifs, et soit $\beta_k = \alpha_k \lambda^{-(2^k)}$ pour tout $k = 1, \ldots, n+1$. On note $\alpha'_k = \alpha_k$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ et $\alpha'_n = \alpha_n + \sqrt{\alpha_{n+1}}$. De même, $\beta'_k = \beta_k$ pour $k = 1, \ldots, n-1$ et $\beta'_n = \alpha'_n \lambda^{-(2^n)}$. Ainsi, il est facile de voir que $\beta'_n = \beta_n + \sqrt{\beta_{n+1}}$ et que le $n-$uplet $(\beta'_1, \ldots, \beta'_n)$ est associé comme dans la proposition $P(n)$ au $n-$uplet $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$. On peut donc appliquer la proposition $P(n)$ à $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n)$, et on a

$$\begin{aligned}
\sqrt{\beta_1 + \sqrt{\beta_2 + \ldots + \sqrt{\beta_n + \sqrt{\beta_{n+1}}}}} &= \sqrt{\beta'_1 + \sqrt{\beta'_2 + \ldots + \sqrt{\beta'_n}}} \\
&= \frac{1}{\lambda}\ \sqrt{\alpha'_1 + \sqrt{\alpha'_2 + \ldots + \sqrt{\alpha'_n}}} \\
&= \frac{1}{\lambda}\ \sqrt{\alpha_1 + \sqrt{\alpha_2 + \ldots + \sqrt{\alpha_n + \sqrt{\alpha_{n+1}}}}},
\end{aligned}$$

ce qui montre que $P(n+1)$ est vraie.

On applique alors ce résultat à notre problème : pour tout $n \geq 1$, on applique $P(n)$ au $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ et on obtient :

$$y_n = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_2 + \ldots + \sqrt{b_n}}} = \frac{1}{\lambda}\ \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \ldots + \sqrt{a_n}}} = \frac{1}{\lambda}\ x_n,$$

c'est ce que l'on cherchait.

(b) Pour tout $n \geq 1$, on a $b_n \leq 1$. D'après la question **1.**, on sait alors que la suite $(\frac{1}{\lambda}\ x_n)_{n\geq 1}$ associée à $(b_n)_{n\geq 1}$ est inférieure ou égale à la suite associée à la suite constante égale à 1, définie dans la question **3.** (cette suite converge vers ω) ; comme de plus on sait d'après **2.** que $(\frac{1}{\lambda}\ x_n)_{n\geq 1}$ est croissante et qu'une suite croissante majorée est convergente, on en déduit que $(\frac{1}{\lambda}\ x_n)_{n\geq 1}$ converge vers une limite $\ell \leq \omega$ (d'après la conservation des inégalités au sens large par passage à la limite).
Ainsi, on peut en déduire que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\lambda\ell$.

5. Soit $\lambda > 1$ et $\alpha > 2$ tels que $a_n \geq \lambda^{(\alpha^n)}$ pour une infinité de valeurs de n.

(a) Soit $n_0 \geq 1$ tel que $a_{n_0} \geq \lambda^{(\alpha^{n_0})}$. On a alors $a_k \geq 0$ pour $1 \leq k \leq n_0 - 1$ et $a_{n_0} \geq \lambda^{(\alpha^{n_0})}$. D'après la question **1.**, on en déduit que

$$x_{n_0} \geq \sqrt{0 + \sqrt{0 + \sqrt{0 + \ldots + \sqrt{0 + \sqrt{\lambda^{(\alpha^{n_0})}}}}}} = (\lambda^{(\alpha^{n_0})})^{\frac{1}{2^{n_0}}} = \lambda^{(\frac{\alpha}{2})^{n_0}}$$

(b) On vient donc de voir que pour une infinité de valeurs de n, on a $x_n \geq \lambda^{(\frac{\alpha}{2})^n}$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^{(\frac{\alpha}{2})^n} = +\infty$ (car $\frac{\alpha}{2} > 1$ et $\lambda > 1$), la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ possède une suite extraite non majorée. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est elle même non majorée. Comme elle est croissante, la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est divergente, vers $+\infty$.

6. (a) Soit $a_n = n$, $n \geq 1$. On a pour tout $n \geq 1$: $n \ln 2 \geq \ln(\ln n)$. Ainsi, $e^{2^n} \geq n$ et donc la condition de la question **4.** est remplie avec $\lambda = e$. On a donc que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie à partir de la suite $(n)_{n\geq 1}$ est convergente de limite inférieure ou égale à $e\omega$.

(b) De même on montre que $n! \leq e^{2^n}$ pour tout $n \geq 1$ et donc que l'on a la condition de la question **4.** avec $\lambda = e$ pour la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie à partir de la suite $(n!)_{n\geq 1}$, qui converge donc.

(c) De même on montre que $n^n \leq e^{2^n}$ pour tout $n \geq 1$ et donc que l'on a la condition de la question **4.** avec $\lambda = e$ pour la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ définie à partir de la suite $(n^n)_{n\geq 1}$, qui converge donc.

M1 - Devoir n^0 3

A rendre au plus tard le 01/12/2000

Exercice

Soient a et b des réels strictement positifs.

(a) Montrer qu'on peut définir deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$x_0 = a,\ y_0 = b,\ x_{n+1} = \frac{x_n^2}{x_n + y_n},\ y_{n+1} = \frac{y_n^2}{x_n + y_n}$$

et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n > 0$ et $y_n > 0$.

(b) Prouver que la suite $(y_n - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.

(c) Etablir que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis qu'elle converge. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente, puis calculer les limites des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème

Soit A un anneau commutatif possédant un élément unité e, et $I \subset A$ un idéal de A.
On dit que I est un idéal maximal de A si, et seulement si, $I \neq A$ et, pour tout idéal J de A vérifiant $I \subset J \subset A$, on a $J = I$ ou $J = A$.
On dit que I est un idéal premier de A si, et seulement si $I \neq A$ et

$$\forall x, y \in A, xy \in I \Rightarrow x \in I \text{ ou } y \in I.$$

(a) Dans cette question (a) seulement, on suppose que $A = \mathbb{Z}$. Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$. On rappelle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.

- (i) Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que I soit un idéal maximal de $\mathbb{Z}$.
- (ii) Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que I soit un idéal premier de $\mathbb{Z}$.

(b) On suppose que I est un idéal premier de A. Montrer que l'anneau quotient A/I est intègre.

(c) On suppose réciproquement que A/I est intègre. Montrer que l'idéal I est premier.

(d) On suppose maintenant que I est un idéal maximal de A.

- (i) On considère $x \in A \setminus I$ et on pose
$$J = I + Ax = \{y \in A; \exists u \in I \text{ et } a \in A,\ y = u + ax.\}$$
Montrer que J est un idéal de A, puis que $J = A$.
- (ii) Montrer que l'anneau quotient A/I est un corps.

(e) On suppose réciproquement que A/I est un corps. Soit J un idéal de A contenant I et différent de I. Montrer que $1 \in J$ et en déduire que I est maximal.

(f) Prouver que si I est un idéal maximal de A, alors I est un idéal premier de A. Donner un exemple simple d'idéal premier dans A non maximal dans A.

(g) On suppose dans cette question que A est principal, c'est-à-dire que pour tout idéal J de A, il existe $x \in A$ tel que J soit l'idéal engendré par x. Montrer que, si I est un idéal de A, I est un idéal maximal de A si, et seulement si, I est un idéal premier de A.

M1 - Corrigé du devoir n^0 3

Exercice

(a) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n et y_n sont définis et strictement positifs. C'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai au rang n, on a $x_n + y_n > 0$, donc x_{n+1} et y_{n+1} sont définis et strictement positifs.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on voit que

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n + y_n} = x_n - y_n.$$

La suite $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante. Sa valeur est donc égale à sa valeur pour $n = 0$, c'est-à-dire $x_0 - y_0 = a - b$. En d'autres termes, on a $y_n = x_n + b - a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n}{x_n + y_n} \leq 1,$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme elle est positive, on en déduit qu'elle converge vers une limite $l \geq 0$. Le résultat de la question (b) indique alors que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + b - a$. Comme la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, on obtient aussi $l + b - a \geq 0$.

On cher che à déterminer l. On a

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = l, \quad \lim_{n\to+\infty} x_n^2 = l^2 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} x_n + y_n = 2l + b - a.$$

Premier cas: $a > b$. Comme $l \geq a - b > 0$ et $2l + b - a = l + l + b - a \geq l > 0$, on obtient donc

$$l = \frac{l^2}{2l + b - a},$$

puis, comme $l \neq 0$, $l = a - b$. Donc, dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = a - b, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Deuxième cas: $a = b$. Ici, $x_n = y_n$ et ces deux suites convergent vers l. Si $l > 0$, on obtient que

$$l = \frac{l^2}{2l},$$

ce qui donne $l = 2l$, impossible pour $l > 0$. Dans ce cas, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = 0.$$

Troisième cas: $a < b$. Ici, $2l + b - a > 0$. Si $l > 0$, on obtient $l = 2l + b - a$, donc $l = a - b$, ce qui est impossible car $l \geq 0$. On en déduit que $l = 0$. Dans ce cas,

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} y_n = b - a.$$

Problème

(a) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$ et différent de $\mathbb{Z}$. Il existe un entier $n \geq 2$ tel que $I = n\mathbb{Z}$.

(i) Si n n'est pas premier, il existe des entiers k et l vérifiant $2 \leq k \leq n-1$ et $2 \leq l \leq n-1$ et $n = kl$. Si $J = k\mathbb{Z}$, on a $I \subset J \subset \mathbb{Z}$, J est un idéal de $\mathbb{Z}$, $I \neq J$ (car $k \in J \setminus I$) et $J \neq \mathbb{Z}$. Donc I n'est pas maximal.
Si n est premier et si J est un idéal de $\mathbb{Z}$ contenant I, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $I \subset J = k\mathbb{Z}$. En particulier, $n \in k\mathbb{Z}$, donc k divise n. Comme n est premier, on obtient que $k = 1$ (donc $J = \mathbb{Z}$) ou $k = n$ (donc $J = I$). L'idéal J est donc maximal.
Ainsi, I est maximal si, et seulement si, n est premier.

(ii) Si n n'est pas premier, il existe des entiers k et l vérifiant $2 \leq k \leq n-1$ et $2 \leq l \leq n-1$ et $n = kl$. On a alors $kl \in I$ et $k \notin I$, $l \notin I$, ce qui montre que I n'est pas premier.
Si n est premier et si $kl \in I$, on voit que n divise kl. Comme n est premier, on a nécessairement n divise k (donc $k \in I$) ou n divise l (donc $l \in I$). L'idéal I est donc premier.
Ainsi, I est premier si, et seulement si, n est premier.

(b) On suppose que I est premier. Soient x et y dans A tels que $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{0}$. On a donc $\overline{xy} = \overline{0}$, ce qui montre que $xy \in I$, donc $x \in I$ (ce qui donne $\overline{x} = \overline{0}$) ou bien $y \in I$ (ce qui donne $\overline{y} = \overline{0}$). L'anneau A/I est donc intègre.

(c) On suppose maintenant A/I intègre. Soient x et $y \in A$ tels que $xy \in I$. On a $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{xy} = 0$, donc $\overline{x} = \overline{0}$ (ce qui donne $x \in I$) ou bien $\overline{y} = \overline{0}$ (ce qui donne $y \in I$). L'idéal I est donc premier.

(d) (i) Soit I un idéal maximal de A et $x \notin I$. Alors l'ensemble J est un idéal de A (vérification immédiate). De plus $I \subset J$ et $I \neq J$ car $x \in J \setminus I$. On en déduit que $J = A$. En particulier, $1 \in J$, ce qui signifie qu'il existe $y \in I$ et $a \in A$ tels que $1 = y + ax$.

(ii) Si maintenant $x \in A$ tel que $\overline{x} \neq \overline{0}$, on a $x \notin I$. Soient $y \in I$ et $a \in A$ tels que $1 = y + ax$. En passant aux classes, on obtient que $\overline{a}\,\overline{x} = \overline{1}$. Cela montre que $\overline{x}$ est inversible dans A/I, qui est donc un corps.

(e) On suppose maintenant que A/I est un corps. Soit J un idéal de A contenant I. Si $J \neq I$, soit $x \in J \setminus I$. Comme $\overline{x} \neq \overline{0}$, il existe $a \in A$ tel que $\overline{ax} = \overline{1}$. Cela signifie qu'il existe $y \in I$ tel que $1 = ax + y$. Comme J est un idéal de A, on obtient que $1 \in J$. Par suite, quel que soit $b \in A$, $b = 1b \in J$, ce qui signifie que $J = A$. L'idéal I est donc maximal.

(f) Si l'idéal I est maximal, alors A/I est un corps, donc un anneau intègre, ce qui montre que I est premier.
Si $A = \mathbb{Z}$ et $I = \{0\}$, l'idéal I est premier mais non maximal.

(g) On suppose que tout idéal de A est engendré par un élément. On sait déjà que tout idéal maximal est premier.

Soit I un idéal premier de A non réduit à $\{0\}$. Il existe donc $x \in A$ tel que $I = xA$. Soit maintenant J un idéal de A contenant I et $y \in A$ tel que $J = yA$. On a en particulier $x \in yA$, donc il existe $z \in A$ tel que $x = yz$. Ainsi, $yz \in I$ qui est un idéal premier. Par suite, $y \in I$ ou $z \in I$. Si $y \in I$, pour tout $a \in A$, $ya \in I$, donc $J \subset I$ puis $J = I$. Si $z \in I$, il existe $u \in A$ tel que $z = xu = yzu$. Cela donne $z(1 - yu) = 0$. Comme A est intègre, et comme $z \neq 0$ (sinon $I = \{0\}$), on obtient que y est inversible, ce qui implique que $1 = yz \in J$, puis que $J = A$. Finalement, I est maximal.

M1 - Devoir n^0 4

A rendre au plus tard le 15/12/2000

Problème ANNEAU DE GAUSS

On note $\mathbb{Z}[i]$ le sous-ensemble de $\mathbb{C}$ suivant
$$\mathbb{Z}[i] = \{x + iy \ ; \ x \in \mathbb{Z}, \ y \in \mathbb{Z}\}.$$

1. *Structure d'anneau*

(a) Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.

(b) Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}, \cdot)$?

(c) L'anneau $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ est-il un corps ?

2. *Division euclidienne*

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$ quelconque. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|z - a| < 1$. On rappelle que pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ($x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$), $|z|$ désigne le module de z et vaut $\sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) Montrer que pour tout $z_0 \in \mathbb{Z}[i]$ et pour tout $z_1 \in \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$, il existe $a \in \mathbb{Z}[i]$ et $b \in \mathbb{Z}[i]$ tels que
$$z_0 = z_1 a + b, \qquad \text{avec} \qquad |b| < |z_1|.$$
On pourra appliquer la question (a) à $z = \frac{z_0}{z_1}$.

3. *Idéaux de $\mathbb{Z}[i]$*

(a) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{Z}[i]$, l'ensemble $a \cdot \mathbb{Z}[i] = \{az \ ; \ z \in \mathbb{Z}[i]\}$ est un idéal de $\mathbb{Z}[i]$.

(b) Soit I un idéal de $\mathbb{Z}[i]$. On suppose que $I \neq \{0\}$.

(i) Montrer que I admet un élément non nul z_1 tel que pour tout $z \in I$, $|z_1| \leq |z|$. On pourra remarquer que le module d'un élément de $\mathbb{Z}[i]$ est un entier naturel.

(ii) Soit $z_0 \in I$. En effectuant la division euclidienne de z_0 par z_1 comme dans la question **2.** (b), montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z_0 = z_1 a$.

(iii) En déduire que $I = z_1 \cdot \mathbb{Z}[i]$.

Exercice

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = xE(\frac{1}{x})$, où $E(\cdot)$ désigne la partie entière.

(a) Donner l'expression de f sur $]-\infty, -1]$ et sur $]1, +\infty[$.

(b) Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

(i) Donner l'expression de f sur $]\frac{1}{p+1}, \frac{1}{p}]$. Montrer que f admet une limite à droite et une limite à gauche en $\frac{1}{p}$, mais différentes.

(ii) Donner l'expression de f sur $]-\frac{1}{p}, -\frac{1}{p+1}]$. Montrer que f admet une limite à droite et une limite à gauche en $-\frac{1}{p}$, mais différentes.

(c) Montrer que f est continue en 0.

M1 - Devoir n^0 5

A rendre la semaine du 08/01/2000

Exercice 1

(a) Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme. Montrer que, si $x \in \mathbb{Q}$, alors $P(x) \in \mathbb{Q}$.

(b) Soit maintenant un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $P(x) \in \mathbb{Q}$. On note

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Montrer que $a_0 \in \mathbb{Q}$.

(b) En déduire que, si P est un polynôme à coefficients réels tel que, pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $P(x) \in \mathbb{Q}$, alors $P \in \mathbb{Q}[X]$. On raisonnera par récurrence sur le degré de P.

Exercice 2

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ ni vide ni réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose qu'il existe des éléments a et b de I tels que $a < b$ et $f(a) < f(b)$. Soit $c \in \left]f(a), f(b)\right[$.

(a) Construire, par récurrence sur n, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante telles que $a_0 = a$, $b_0 = b$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq b_n,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n},\ f(a_n) \leq c \leq f(b_n).$$

Indication: si a_n et b_n sont construits et si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geq c$, on posera $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$.

(b) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont une limite commune x, puis que $f(x) = c$.

(c) Quel théorème vient-on de retrouver ?

Exercice 3

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ ni vide ni réduit à un point, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $K > 0$. On dit que f est K-lipschitzienne sur I si, et seulement si, pour tous $x, y \in I$,

$$|f(y) - f(x)| \leq K\,|x - y|\,.$$

(a) On suppose que la fonction f est K-lipschitzienne sur I. Montrer que f est uniformément continue sur I. En déduire que f est continue sur I.

(b) Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$. Montrer que f est uniformément continue sur $[0,1]$.

(c) On reprend la fonction f de la question (b). Montrer qu'il n'existe pas de $K > 0$ tel que f soit K-lipschitzienne sur $[0,1]$.

Indication: si f est K-lipschitzienne sur $[0,1]$, alors $|f(x) - f(0)| \leq K\,|x|$ pour tout $x \in [0,1]$.

M1 - Corrigé du devoir n^0 5

Exercice 1

(*a*) Si $x \in \mathbb{Q}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in \mathbb{Q}$. Comme pour tout k, $a_k \in \mathbb{Q}$, on obtient que $P(x) \in \mathbb{Q}$.
(*b*) Comme $a_0 = P(0)$, l'hypothèse sur P montre que $a_0 \in \mathbb{Q}$.
(*c*) On montre la propriété suivante:
Pour tout polynôme P de degré n tel que $P(x) \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$ tels que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X(X-1)\ldots(X-k+1). \tag{2}$$

Soit P de degré n tel que $P(x) \in \mathbb{Q}$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$. On pose $a_0 = P(0) \in \mathbb{Q}$ et, si $1 \leq j \leq n$ et si on a construit $a_0, \ldots, a_{j-1} \in \mathbb{Q}$, on définit

$$a_j = \frac{1}{j!}\left(P(j) - \sum_{k=0}^{j-1} a_k j(j-1)\ldots(j-k+1)\right).$$

L'hypothèse sur P implique que $a_j \in \mathbb{Q}$. De plus, on a bien

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X(X-1)\ldots(X-n+1),$$

car ces deux polynômes de degré n prennent les mêmes valeurs en $0, \ldots, n$, c'est-à-dire en $n+1$ points distincts.
L'écriture (2) et le fait que les a_j sont dans $\mathbb{Q}$ montre enfin que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 2

(*a*) On définit $a_0 = a$, $b_0 = b$. Si, pour un $n \in \mathbb{N}$, on a construit $a_0, ..., a_n$ et $b_0, ...b_n$ vérifiant toutes les conditions requises, on pose $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(c_n) \geq c$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. On vérifie alors que $a_{n+1} \leq b_{n+1}$, $a_{n+1} \geq a_n$, $b_{n+1} \leq b_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$ et $f(a_{n+1}) \leq c \leq f(b_{n+1})$. Si $f(c_n) \leq c$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$, et on contrôle que les mêmes propriétés sont vérifiées.
(*b*) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et convergent donc vers la même limite x. Comme f est continue (remarquer que c'est le seul moment où cette continuité intervient),

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) = f(x).$$

Par construction des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $f(a_n) \leq c \leq f(b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité, on obtient donc $f(x) \leq c \leq f(x)$, d'où $f(x) = c$.
(*c*) On vient donc de prouver le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 3

(*a*) On suppose que f est K-lipschitzienne sur I. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K}$. Si x et y vérifient $|x-y| \leq \delta$, alors

$$|f(x) - f(y)| \leq K\,|x-y| \leq K\delta \leq \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue sur I, donc continue sur I.
(*b*) Si $x \geq 0$, on pose $f(x) = \sqrt{x}$. On montre que f est uniformément continue sur $[0,1]$. Soit $\varepsilon > 0$, et $x, y \in [0,1]$ vérifiant $0 \leq x \leq y$ et $y - x \leq \varepsilon^2$. Si $y \leq \varepsilon^2$, on a

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \leq \varepsilon.$$

Si $y \geq \varepsilon^2$, on a

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{y-x}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \leq \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \varepsilon.$$

Ainsi, pour tous $x, y \in [0,1]$ vérifiant $|y-x| \leq \varepsilon^2$, $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$.

(c) On suppose maintenant qu'il existe $K > 0$ tel que, pour tous $x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq K\,|y - x|$. On a donc, en particulier, pour tout $y \geq 0$, $\sqrt{y} \leq Ky$, ce qui signifie que, pour tout $y \in]0,1]$,

$$\frac{1}{\sqrt{y}} \leq K,$$

ce qui est impossible car

$$\lim_{y \to 0} \frac{1}{\sqrt{y}} = +\infty.$$

La fonction f n'est donc pas lipschitzienne sur $[0,1]$.

M1 - Interrogation du 14 novembre 2000

I

Soit a un réel > 0. Pour chaque réel $x > 0$ on pose

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a^2}{x}\right).$$

1 – Soit λ un réel > 0.
i) Montrer qu'il existe une suite deréels $(u_n)_{n\geq 1}$, et une seule, telle $u_1 = \lambda$ et, pour $n \geq 2$, $u_n = f(u_{n-1})$.
ii) Montrer que, pour chaque entier $n \geq 1$, $u_n > 0$.
2 – Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$ on a $u_n \geq a$ [calculer $u_n - a$].
3 – Montrer que, pour chaque entier $n \geq 2$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.
4 – La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?

II

On note

$$G = \left\{(a, b) \in \mathbb{R}^2;\ a \neq 0\right\}$$

et on définit sur G l'opération $*$ par

$$(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b)$$

pour tous (a, b) et (a', b') dans G.
1 – Montrer que $(G, *)$ est un groupe. Donner son élément neutre et calculer le symétrique de (a, b) pour tout $(a, b) \in G$. Le groupe G est-il commutatif ?
2 – Soient

$$H_1 = \{(a, b) \in G;\ a > 0\} \text{ et } H_2 = \{(a, b) \in G;\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}\}.$$

Est-ce que H_1 et H_2 sont des sous-groupes de G ?
3 – L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $*$ est-il un groupe ?
4 – L'ensemble $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même est muni de l'opération de composition des fonctions. Si $(a, b) \in G$, on définit la fonction $f_{a,b}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f_{a,b}(x) = ax + b.$$

Montrer que l'application T de G dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui, à $(a, b) \in G$ associe $T(a, b) = f_{a,b}$ est un homomorphisme injectif.

M1 - Corrigé de l'interrogation écrite du 14 novembre 2000

I

Soit $a > 0$, $\lambda > 0$ et $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a^2}{x})$

1. On veut montrer que l'on peut construire par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de réels telle que $u_1 = \lambda$ et pour $n \geq 2$, $u_n = \frac{1}{2}(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}})$.
Remarquons, dans un premier temps, que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$ (comme somme de termes strictement positifs).
Le premier terme de la suite $u_1 = \lambda > 0$ est donné. Supposons que l'on puisse construire $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ et que, de plus, $u_k > 0$ pour tout $k = 1, \ldots, n-1$. Comme $u_{n-1} > 0$, on en déduit d'après la remarque ci-dessus que l'on peut évaluer f en u_{n-1} et que $f(u_{n-1}) > 0$. On pose alors $u_n = f(u_{n-1})$ et on a $u_n > 0$. Ainsi, on construit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ comme demandé dans l'énoncé.

2. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_n - a \;=\; \frac{1}{2}\left(u_{n-1} + \frac{a^2}{u_{n-1}}\right) - a \;=\; \frac{1}{2u_{n-1}}\left(u_{n-1}^2 + a^2 - 2au_{n-1}\right) \;=\; \frac{1}{2u_{n-1}}(u_{n-1} - a)^2 \;\geq\; 0.$$

Ainsi, $u_n \geq a$ pour tout $n \geq 2$.

3. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$u_{n+1} - u_n \;=\; \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a^2}{u_n}\right) - u_n \;=\; \frac{1}{2u_n}\left(u_n^2 + a^2 - 2u_n^2\right) \;=\; \frac{1}{2u_n}(a^2 - u_n^2).$$

Comme d'après la question précédente, $u_n \geq a > 0$, on a $a^2 \leq u_n^2$ pour tout $n \geq 2$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout $n \geq 2$; ainsi, $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq 2$.

4. D'après la question 3, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante (à partir du rang $n = 2$). D'après la question 2, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est minorée par a. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente. Soit ℓ sa limite. Par conservation des inégalités larges par passage à la limite, on a $\ell \geq a > 0$. De plus, on sait que si une suite de réels strictement positifs converge vers une limite strictement positive, alors la suite des inverses converge vers l'inverse de la limite. Autrement dit, on a $(\frac{1}{u_n})_{n\geq 1}$ converge vers $\frac{1}{\ell}$. De plus, la somme de deux suites convergentes est convergente et sa limite est la somme des limites ; ainsi, on a $(\frac{1}{2}\,(u_n + \frac{a^2}{u_n}))_{n\geq 1}$ est convergente de limite $\frac{1}{2}\,(\ell + \frac{a^2}{\ell})$. D'après la relation de récurrence que vérifie la suite $(u_n)_{n\geq 1}$, et par unicité de la limite d'une suite convergente, on a finalement $\ell = \frac{1}{2}\,(\ell + \frac{a^2}{\ell})$. En résolvant cette équation, sachant que $\ell > 0$, on trouve $\ell = a$.

II

1. Pour montrer que $(G, *)$ est un groupe, on va d'abord montrer que $*$ est une loi de composition interne dans G. Soit $(a, b) \in G$ et $(a', b') \in G$. On a alors $(a, b) * (a', b') = (aa', ab' + b)$ par définition. Comme $a, a' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $aa' \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et comme $a, b, b' \in \mathbb{R}$, $ab' + b \in \mathbb{R}$. Ainsi, $(a, b) * (a', b') \in G$: $*$ est une loi de composition interne dans G.
Montrons encore que $*$ est associative. On remarque que

$$\begin{aligned}(a,b) * ((a',b') * (a'',b'')) &= (a,b) * (a'a'', a'b'' + b') \\ &= (aa'a'', a(a'b'' + b') + b) \\ &= (aa'a'', aa'b'' + ab' + b)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}((a,b) * ((a',b')) * (a'',b'') &= (aa', ab' + b) * (a'',b'') \\ &= (aa'a'', aa'b'' + (ab' + b)) \\ &= (aa'a'', aa'b'' + ab' + b),\end{aligned}$$

ce qui prouve l'associativité de $*$.

De plus, $(1,0) \in G$ et pour tout $(a,b) \in G$, on remarque que $(a,b) * (1,0) = (1,0) * (a,b) = (a,b)$. Ainsi, $(1,0)$ est l'élément neutre de G.
Pour pouvoir conclure que $(G,*)$ est un groupe, il faut encore montrer que tout élément de G possède un symétrique dans G par la loi $*$. Soit $(a,b) \in G$. Alors l'élément $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ (on rappelle que $a \neq 0$) appartient à G et on a $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) * (a,b) = (a,b) * (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (1,0)$. Ainsi, tout élément (a,b) de G possède un symétrique $(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a})$ (que l'on note $(a,b)^{-1}$) dans G par $*$.
Le groupe $(G,*)$ n'est pas commutatif. En effet, les éléments $(1,2)$ et $(2,3)$ sont dans G, mais $(1,2) * (2,3) = (2,5)$ et $(2,3) * (1,2) = (2,7)$. Ainsi, $(1,2) * (2,3) \neq (2,3) * (1,2)$, et donc $(G,*)$ n'est pas commutatif.

2. Soit $H_1 = \{(a,b) \in G; a > 0\}$. Pour montrer que H_1 est un sous-groupe de $(G,*)$, il suffit de montrer que $H_1 \neq \emptyset$ et que pour tout $(a,b),(c,d) \in H_1$, $(a,b) * (c,d)^{-1} \in H_1$. Or $(1,0) \in H_1$, donc $H_1 \neq \emptyset$. De plus, on a $(a,b) * (c,d)^{-1} = (\frac{a}{c}, -\frac{ad}{c} + b)$. Comme $a > 0$ et $c > 0$, on a $\frac{a}{c} > 0$ et donc $(a,b) * (c,d)^{-1} \in H_1$. Ainsi H_1 est bien un sous-groupe de $(G,*)$.
Soit maintenant $H_2 = \{(a,b) \in G; a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\}$. On a par exemple $(2,0) \in H_2$, mais $(2,0)^{-1} = (\frac{1}{2}, 0) \notin H_2$. Ainsi H_2 n'est pas un sous-groupe de $(G,*)$.

3. $(\mathbb{R}^2, *)$ n'est pas un groupe. En effet, aucun élément de $\mathbb{R}^2$ de la forme $(0,b)$ ne possède de symétrique dans $\mathbb{R}^2$ car pour tout $(c,d) \in \mathbb{R}^2$, on a $(0,b) * (c,d) = (0,b) \neq (1,0)$.

4. Pour montrer que l'application T définie dans l'énoncé est un homomorphisme injectif, il faut montrer que

(i) $T((a,b) * (c,d)) = f_{a,b} \circ f_{c,d}$ pour tout $(a,b),(c,d) \in G$ *(homomorphisme)* ;
(ii) $T(a,b) = T(c,d)$ implique $(a,b) = (c,d)$ *(injectif)*.

Montrons tout d'abord que (i) est vérifié. Pour tout $(a,b),(c,d) \in G$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(f_{a,b} \circ f_{c,d})(x) = f_{a,b}(cx+d) = a(cx+d) + b = (ac)x + (ad+b) = f_{ac,ad+b}(x)$. Ainsi, on a $f_{a,b} \circ f_{c,d} = f_{(a,b)*(c,d)} = T((a,b) * (c,d))$: T est un homomorphisme.
Pour montrer que (ii) est vérifié, soit $(a,b),(c,d) \in G$ tels que $T(a,b) = T(c,d)$. Alors on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $ax + b = cx + d$. On applique donc cette égalité à $x = 0$ et on obtient $b = d$, puis on l'applique à $x = 1$ pour obtenir aussi que $a = c$. Ainsi, on vient de montrer que si $T(a,b) = T(c,d)$, alors $(a,b) = (c,d)$: T est injectif.

Interrogation du 17 décembre 2000

I

On rappelle que si G est un groupe noté additivement on pose pour chaque $x \in G$ et chaque $n \in \mathbb{Z}$

$$nx = \begin{cases} x + x + \cdots x & n \text{ fois } x \text{ si } n \geq 1, \\ 0 & \text{si } n = 0, \\ (-n)x & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Soit A un anneau. On note $B = A \times \mathbb{Z}$. On définit deux opérations internes notées additivement sur B en posant pour chaque $(a, m), (b, n) \in B$

$$(a, m) + (b, n) \qquad = (a + b, m + n)$$

$$(a, m)(b, n) \qquad = (ab + mb + na, mn).$$

1 - Montrer que B est un anneau.
2 - Montrer que $e = (0, 1)$ est élément unité de B.
3 - Montrer que l'application $f : A \to B$ qui, à chaque élément $x \in A$ associe $f(x) = (x, 0)$ est un homomorphisme injectif.
4 - Montrer que $f(A)$ est un idéal de B.

5 - On suppose l'anneau A commutatif. Est-ce que B est commutatif ?
6 - On suppose que A est un corps. Donner les éléments inversibles de B et déterminer leur inverse. Est-ce que B est un corps ?
6' - On dit qu'un élément $x \in A$ est quasi-inversible s'il existe un élément $y \in A$ tel que $x+y-xy = x + y - yx = 0$. Montrer que x est quasi-inversible si, et seulement si, $f(x)$ est inversible dans B.

II

Soient A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$, a un point d'accumulation de A et f une fonction bornée de A dans $\mathbb{R}$.
1 - Soit n un entier ≥ 1. Justifier l'existence des deux réels

$$m_n \quad = \inf \left\{ f(x)\,;\, x \in A \;\text{ et }\; 0 < |x - a| \leq \tfrac{1}{n} \right\},$$

$$M_n \quad = \sup \left\{ f(x)\,;\, x \in A \;\text{ et }\; 0 < |x - a| \leq \tfrac{1}{n} \right\}.$$

2 - Montrer que la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
3 - Montrer que la suite $(m_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note l sa limite. Montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est convergente. On note L sa limite. Montrer que $l \leq L$.
4 - Soient α, β deux réels tels que $\alpha < \beta$. Construire un exemple de fonction f montrant que l'on peut avoir $l = \alpha$ et $L = \beta$. (on prendra pour A un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point).
5 - Montrer que f possède une limite quand $x \in A$, tend vers a par valeurs différentes si, et seulement si, $l = L$, et que, quand cette condition est réalisée, on a

$$\lim_{x \to a,\ x \neq a} f(x) = l.$$

FACULTE DES SCIENCES DE MARSEILLE SAINT-JÉRÔME

M 1

Ecrit du 22 Janvier 2001 – Durée 4 heures

Aucun document – Aucune calculatrice

I

Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même telle que :

- $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = a$,
- pour chaque $x \in \mathbb{R}$ elle vérifie la relation $f(3x+1) = f(x)$.

On note g la fonction qui, à chaque réel t, associe $g(t) = \dfrac{1}{3}(t-1)$. On désigne par g^n la composée de g avec elle-même n fois.

1 - Montrer que, pour tout $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g^n(t) = \frac{t}{3^n} - \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^n}\right).$$

2 - Montrer par récurrence, en utilisant la relation vérifiée par f, que $f(g^n(t)) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3 - Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la suite $(g^n(t))_{n \geq 1}$ est convergente vers $-\dfrac{1}{2}$.

4 - Déduire de 2 et 3 que $f(t) = a$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

II

Soit A un anneau commutatif unitaire sans diviseur de 0. L'élément neutre de la multiplication est noté e. On suppose :

- qu'il existe un élément m de A qui n'est le carré d'aucun élément de A;
- que pour chaque $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ on a $ne \neq 0$.

1 - Donner un exemple d'un tel anneau A et d'un tel élément m.

On définit sur $A \times A$ deux opérations internes notées additivement et multiplicativement en associant à chaque $(a,b), (c,d) \in A \times A$

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),$$

$$(a,b)(c,d) = (ac + mbd, ad + bc).$$

2 - Montrer que, pour ces deux opérations, $A \times A$ est un anneau commutatif unitaire.

Dorénavant, $A \times A$ muni des opérations définies ci-dessus sera noté $A[\sqrt{m}]$.

3 - Montrer que l'application θ de A dans $A[\sqrt{m}]$ qui, à chaque élément $a \in A$, associe $\theta(a) = (a, 0)$ est un homomorphisme injectif. En déduire que $\theta(A)$ est un sous-anneau de $A[\sqrt{m}]$.

Les éléments de $A[\sqrt{m}]$ de la forme $\theta(a)$ avec $a \in A$ seront notés a. On pose $\omega = (0, e)$.

4 - Montrer que, pour $z \in A[\sqrt{m}]$, il existe un unique couple $(a,b) \in A \times A$ tel que $z = a + \omega b$.

5 - Calculer ω^2. Résoudre, dans $A[\sqrt{m}]$, l'équation $(a + \omega b)^2 = m$.

Pour chaque $z = a + \omega b \in A[\sqrt{m}]$ on note $\overline{z}$ l'élément de $A[\sqrt{m}]$ égal à $a - \omega b$ et $\varphi(z) = z\,\overline{z}$.

6 - Montrer que l'application $h : A[\sqrt{m}] \to A[\sqrt{m}]$ qui, à chaque z associe $h(z) = \overline{z}$, est un homomorphisme bijectif.

7 - Soient $z, z_1 \in A[\sqrt{m}]$.
a) Montrer que $\varphi(z) \in \theta(A)$.
b) Montrer que $\varphi(zz_1) = \varphi(z)\varphi(z_1)$.
c) Montrer que z est inversible si, et seulement si, $\varphi(z)$ est inversible dans $\theta(A)$.

8 - Montrer que, si A est un corps, alors $A[\sqrt{m}]$ est un corps.

9 - On suppose dans cette question que A est un corps.

a) Montrer que le polynôme $X^2 - m$ est irréductible dans $A[X]$.
b) On note I l'idéal de $A[X]$ engendré par $X^2 - m$. Montrer que l'anneau quotient $A[X]/I$ est un corps isomorphe à $A[\sqrt{m}]$.