TD n°1
Raisonnements par récurrence et par l'absurde

Exercice 1

1. Pour tout entier $n \geq 0$, calculer $S_1(n) = \sum_{k=0}^{n} k$.
2. Pour tout entier $n \geq 0$, montrer que $S_2(n) = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 2

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+1)^n}{n!}$.

Exercice 3

Montrer que pour tout $x \in IR - \{1\}$, pour tout entier $n \geq 1$,

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Exercice 4

Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 5

But de l'exercice : Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
En supposant que $a=\sqrt{2}$ soit rationnel, en déduire l'existence d'un entier naturel c tel que ac soit entier. Soit b le plus petit naturel entier vérifiant cette propriété (justifier son existence).
Montrer que $m=b(a-1)$ est un entier naturel et que $m<b$.
En observant ma, en déduire une contradiction.

Exercice 6

Soient x et y des réels positifs.

Montrer que $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.

Exercice 7

Soient a et b des nombres réels tels que $0 \leq a < b$.

1. Montrer que $a^2 < b^2$.
2. Montrer que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
3. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $a^n < b^n$.

Exercice 8

Soient a et b des nombres réels. On suppose que pour tout $x > b$, on a $a \leq x$.
Montrer que $a \leq b$.