TD n°2
Injection, Surjection, Bijection

Exercice 1

Montrer que l'application f de IR dans IR définie par $f(x)=2x+3$ est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 2

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f:\left(\begin{array}{l} Z \to Z \\ n \mapsto 2n \end{array}\right.$
2. $f:\left(\begin{array}{l} Z \to Z \\ n \mapsto -n \end{array}\right.$
3. $f:\left(\begin{array}{l} IR \to IR \\ x \mapsto x^2 \end{array}\right.$
4. $f:\left(\begin{array}{l} IR \to IR_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}\right.$
5. $f:\left(\begin{array}{l} IR_+ \to IR_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}\right.$

Exercice 3

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f:\left(\begin{array}{l} IN \to IN \\ n \mapsto n+1 \end{array}\right.$
2. $f:\left(\begin{array}{l} Z \to Z \\ n \mapsto n+1 \end{array}\right.$

3. $f : \begin{cases} IR^2 \to IR^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{cases}$
4. $f : \begin{cases} IR - \{1\} \to IR \\ x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1} \end{cases}$

Exercice 4

Soit $f : \begin{cases} IN \to IN \\ n \mapsto n^2 - 4n + 4 \end{cases}$.

L'application f est-elle bijective ? Quel est l'ensemble $f^{-1}(\{2,3\})$?

Exercice 5

On construit une application f de IN dans Z de la manière suivante :
$f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = -1, f(3) = 2, f(4) = -2$, etc.

Définir mathématiquement cette application et montrer qu'il s'agit d'une bijection.

Exercice 6

Soit $f : E \to F$ une application.

Montrer que :
1. f est injective $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E, f^{-1}(f(A)) = A$.
2. f est surjective $\Leftrightarrow$ $\forall B \subset F, f(f^{-1}(B)) = B.$

Exercice 7

Soit $f : E \to F$ une application.

Montrer que : f est injective $\Leftrightarrow$ $\forall (A,B) \in \wp(E) \times \wp(E), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 8

Soit f une application de E vers E telle que $f \circ f \circ f = f$.

Montrer que si f est injective ou surjective alors $f^2 = id$.

Exercice 9

Soit f une application de E vers E telle que $f \circ f = f$.
Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice 10

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
Montrer que :

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2. Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 11

Montrer qu'il n'existe pas d'application $f : IN \to IN$ telle que
$\forall n \in IN, f \circ f(n) = n + 1$.