TD n°3
Fonctions hyperboliques, Réels

Exercice 1

1. Montrer que la fonction $sh:\begin{cases} IR \to IR \\ x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{cases}$ est une bijection et donner sa réciproque.
2. Montrer que la fonction $ch:\begin{cases} IR \to IR \\ x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ n'est ni injective, ni surjective.
3. Montrer que la fonction $ch:\begin{cases} IR_+ \to [1,+\infty[\\ x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$ est une bijection et donner sa réciproque.

Exercice 2

Soient a,b deux nombres rationnels positifs tels que $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$ soient irrationnels.
Montrer que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est irrationnel.

Exercice 3

Soit $P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ avec $\forall 0 \le i \le n, a_i$ est un entier.

1. Montrer que si $\dfrac{p}{q}$ est racine de P avec p et q premiers entre eux, alors p divise a_0 et q divise a_n.
2. On considère $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
   Montrer que a^2 est racine d'un polynôme à coefficients entiers de degré 2 et en déduire qu'il est irrationnel.

Exercice 4

Montrer que $A=\{r^3, r \in Q\}$ est dense dans IR, c'est-à-dire que entre deux réels, on peut toujours trouver un élément de A.

Exercice 5

Soient $a,b \in IR$.
Montrer que :

1. $a \le b \Rightarrow E(a) \le E(b)$.
2. $E(a)+E(b) \le E(a+b) \le E(a)+E(b)+1$.

Exercice 6

1. Pour tout réel x, montrer que $E(x)+E(-x)=0 \Leftrightarrow x \in Z$.
2. Montrer si $x \in IR - Z$, $E(x)+E(-x)=-1$.

Exercice 7

Montrer que $\forall x \in IR, \forall n \in IN^*, E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right)=E(x)$.