TD n°4
Réels, Suites, Borne Supérieure, Borne Inférieure

Exercice 1

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in IN / \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.
2. Que peut-on en déduire pour la suite $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n \in IN}$.

Exercice 2

Montrer, en utilisant la définition de la limite, que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n^2+1}{n^3+1} = 0$.

Exercice 3

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in IN}$ définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{1+n}$ n'a pas de limite.

Exercice 4

1. Ecrire sous forme d'une union d'intervalles l'ensemble des réels x tels que la partie fractionnaire de x soit strictement inférieure à $\frac{1}{5}$.
2. Calculer $\bigcup\limits_{n \geq 1} \left]\frac{1}{n}; +\infty\right[$ et $\bigcup\limits_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}; +\infty\right[$.
3. Déterminer $\bigcap\limits_{n \geq 1} \left[-\frac{1}{n}; 2+\frac{1}{n}\right[$.
4. Déterminer $\bigcap\limits_{n \geq 1} \left]0; \frac{1}{n}\right[$.

Exercice 5

Les ensembles suivants ont-ils une borne supérieure, un plus grand élément, une borne inférieure, un plus petit élément ?

$$A = [0;3[,\quad B = \{0\} \cup]1;2],\quad C = [0;1/3],\quad D = \left\{\frac{1}{n}, n \in IN^*\right\}.$$

Exercice 6

Soit

$$I=\left\{x\in IR^{*}/-2<x+\frac{1}{2x}\leq 2\right\}$$

1. Montrer que I est la réunion de deux intervalles.
2. Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de I.

Exercice 7

Soient A et B deux parties non vides et bornées de IR et $a\in IR$. On note :

$$A=\{-x/x\in A\}$$
$$A+B=\{x+y/x\in A, y\in B\}$$
$$a+A=\{a+x/x\in A\}$$
$$AB=\{xy/x\in A, y\in B\}$$

1. Montrer que $\sup(-A)=-\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.
3. Montrer que $\sup(a+A)=a+\sup(A)$.
4. A-t-on $\sup(AB)=\sup(A)\sup(B)$?

Exercice 8

Soient A, B deux parties non vides de IR.

1. On suppose que B est majorée.
   Montrer que si $A\subset B$, $\sup(A)$ existe et $\sup(A)\leq\sup(B)$.
2. On suppose que B est minorée.
   Montrer que si $A\subset B$, $\inf(B)\leq\inf(A)$.

Exercice 9

Soient A, B deux parties non vides et bornées de IR.

Montrer que $\sup(A\cup B)$ et $\inf(A\cup B)$ existent et déterminer-les.

Exercice 10

On considère le sous-ensemble de IR suivant : $E=\left\{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}/(m,n)\in IN^{*}\times IN^{*}\right\}$.

Montrer que $\sup(E)$ et $\inf(E)$ existent et déterminer-les.

Exercice 11

On considère le sous-ensemble de IR suivant : $A=\left\{\frac{n-1/n}{n+1/n}/n\in IN^{*}\right\}$.

Cet ensemble est-il majoré ? minoré ? admet-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? une borne supérieure ? une borne inférieure ? Justifier.