Université Paul Cézanne 1er semestre 2007/08

TD5 M1 – Analyse

Exercice 1 En encadrant $\cos(n)$, déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n)+n}{\cos(n)-n}.$$

Exercice 2 Etudier le comportement des suites de termes généraux suivants quand n tend vers $+\infty$

$a.$ $\cos\frac{1}{n}$	$b.$ $\sin\frac{(-1)^n}{n}$	$c.$ $n\sin\frac{1}{n}$
$d.$ $\sin\frac{n\pi}{2}$	$e.$ $\frac{5n-6}{n^2+2n+4}$	$f.$ $\frac{2n+(-1)^n}{3n+(-1)^n}$
$g.$ $\frac{\sqrt{4n^2+3n+1}}{5n-6}$	$h.$ $\frac{2^n-5^n}{2^n+5^n}$	$i.$ $n^{\frac{1}{n^2}}-1$
$j.$ $(2n^2+n+1)\ln(1+\frac{3}{5n^2+1})$	$k.$ $n(e^{\frac{1}{n}}-1)$	$l.$ $(1+\frac{1}{n})^n$
$m.$ $(-1)^n+\frac{1}{n+1}$	$n.$ $\sqrt{4n^2+3n+1}-an \quad \forall a\in\mathbb{R}$	

Exercise 3 Parmi les assertions suivantes, dire quelles sont celles qui sont fausses (on donnera alors un contre-exemple) et celles qui sont vraies (on donnera une démonstration):
1. Une suite converge si et seulement si elle est bornée.
2. Si une suite est croissante et convergente, elle est majorée.
3. Si une suite converge et est majorée, alors elle est croissante.
4. Si une suite est décroissante et positive alors elle converge.
5. Si une suite est croissante et non majorée, alors elle diverge.
6. Si une suite est non croissante et non majorée, elle diverge.
7. Pour toute suite $(a_n)_n$ et tout réel λ, la suite $(\lambda a_n)_n$ est de même nature que la suite $(a_n)_n$.
8. Si $(a_n)_n$ converge et $(b_n)_n$ diverge, alors $(a_n+b_n)_n$ diverge.
9. Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ divergent, alors $(a_n+b_n)_n$ diverge.
10. Si $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ divergent, alors $(a_n.b_n)_n$ diverge.

Exercice 4. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$w_n = 1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}$$

est convergente. (Montrer qu'elle est croissante et majorée, en utilisant que pour tout $n>1$, $\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}$).

Exercice 5. Soit $a_0 \in \mathbb{R}$, $0 < u_0 < \pi$. On considère la suite définie par

$$u_{n+1} = u_n + \sin(u_n).$$

(a) Montrer que $0 < u_n < \pi \ \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) Montrer que u_n est croissante.
(c) Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 6. Si u_n converge à une limite strictement positive alors ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang.

Exercice 7 *Suite de Fibonacci*
Soit (u_n) la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, {u_{n+1}}^2 - u_n u_{n+2} = (-1)^n$.
b. On pose $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Montrer que les suites $(v_{2n})_n$ et $(v_{2n+1})_n$ sont adjacentes et en déduire la convergence de la suite $(v_n)_n$.
c. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et calculer la limite de $(v_n)_n$.

Exercice 8 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On admettra que pour $n \geq 1$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
1) Montrer que $\forall n$, $u_n \geq ln(n+1)$.
2) Calculer la limite de u_n

On considère les suites (v_n) et (w_n) définies par : $v_n = u_n - \ln(n+1)$ et $w_n = u_n - \ln(n)$.

3) Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
4) En déduire qu'il existe un réel γ tel que pour tout $n \geq 1$, $\ln(n) + \gamma \leq u_n \leq \gamma + \ln(n+1)$.

Exercice 9 Soit $(u_n)_n$ une suite qui ne s'annule pas et telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \quad \text{avec} \quad l < 1.$$

1) Montrer qu'il existe un réel $M < 1$ et un entier N tel que pour tout $n > N$, $|u_{n+1}| \leq m|u_n|$.
2) Démontrer par récurrence que, pour tout $n > N$, $|u_n| \leq m^{n-N}|u_N|$.
3) En déduire que (u_n) converge vers 0.