Théorème de Rolle.

Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$
telle que $f(a) = f(b)$
Alors $\exists\, c \in]a,b[$ telle que $f'(c) = 0$

1) Si f est constante sur $[a,b]$
on a $\forall\, c \in]a,b[\ ,\ f'(c) = 0$

2) Si f n'est pas constante sur $[a,b]$
f continue sur $[a,b] \Rightarrow f([a,b]) = [\inf_{[a,b]} f, \sup_{[a,b]} f]$

De plus, $\exists\, c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \sup_{[a,b]} f$
$\exists\, c' \in [a,b]$ tel que $f(c') = \inf_{[a,b]} f$

comme f non constante
$\Rightarrow f(c) \neq f(c')$

De plus $f(a) = f(b) \Rightarrow$ soit $c \in]a,b[$
(ou) soit $c' \in]a,b[$

D'après (précédent), on aura,
Soit $f'(c) = 0$, (ou) soit $f'(c') = 0$

donc $\square$ du th de Rolle.

Rq : Ce théorème est faux pour des fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$ ou à valeurs vectorielles.

Exemple : $f : [0 ; 2\pi] \to \mathbb{C}$
$x \to e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$

$f'(x) = -\sin(x) + i\cos(x)$

$= i f(x)$

$f(0) = 1 = f(2\pi)$

f continue sur $[0 ; 2\pi]$ dérivable sur $]0 ; 2\pi[$
$|f'(x)| = |ie^{ix}| = 1$

donc $\forall x \in [0, 2\pi]$, $f'(x) \neq 0$

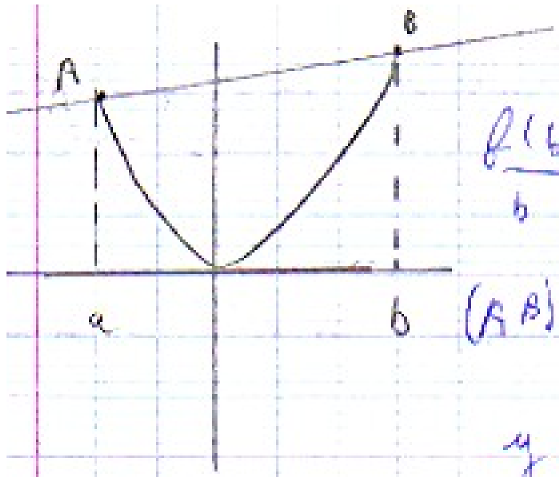
$\square$

Théorème des Accroissements finis
Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

Alors $\exists\, c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a) f'(c)$

Rq 1 : Le Th de Rolle est un cas particulier de ce Théorème.

Rq 2 : Ce théorème est une conséquence du Th de Rolle.



$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est la pente de (AB)

(AB) a pour équation :

$$y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

Notons $\varphi : x \to \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$

$$\mathcal{C}_\varphi = \text{droite } (AB)$$

$f'(x)$ est la pente de la tangeante au graphe de f au point $(c, f(c))$

Interprétation graphique.

Le Th nous dit qu'il existe un point c tel que la tangeante $(c, f(c))$ est parallèle à la droite (AB)

Soit $g(x) = f(x) - \varphi(x)$

$$= f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

g continue sur $[a,b]$ dérivable sur $]a,b[$

(Théorème général sur les suites d'applications continues et dérivables)

$$\begin{cases} g(a) = 0 \\ g(b) = 0 \end{cases}$$

Th de Rolle sur g :

$\exists c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$

$$\forall x \in]a,b[, \; g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$g'(c) = 0 \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Exercice :

On pose pour $x \in [0,1]$, $f(x) = \frac{4}{\pi}\arctan(x)$

1) Etudier la variation de $g(x) = f(x) - x$ sur $[0,1]$

On donne $\sqrt{\frac{4}{\pi} - x} \sim 0{,}82$

2) En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet uniquement deux solutions dans $[0,1]$, que f sur $[0,1]$, tracer son graphe dans un repère orthonormé

3) On ~~définit~~ donne $u_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ et $\forall n \in n$,

$u_{n+1} = f(u_n)$

Etudier la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

1) arctan ~~(x)~~ dérivable sur $[0,1]$ car bijection réciproque de arctan

donc f dérivable sur $[0,1]$ et g dérivable car différence de fonctions dérivables

donc $g'(x) = f'(x) - 1$

$$g'(x) = \frac{4}{\pi(1+x^2)} - 1$$

$$g'(x) = \frac{4 - \pi(1+x^2)}{\pi(1+x^2)}$$

$g'(x)$ ~~est~~ est définie sur $[0;1]$ car $\pi(1+x^2) \neq 0$

donc $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4 - \pi(x^2+1) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 - \pi = \pi x^2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} = \pm x$$

Or, $x \in [0,1]$ donc si $x = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$, $g'(x) = 0$

On a : $\begin{cases} \text{pour } x = 0,\ \pi(1+x^2) = \pi > 0 \\ \forall x \in [0,1],\ \pi(1+x^2) \neq 0 \end{cases}$

donc $\forall x \in [0,1]$ $\pi(1+x^2) > 0$

donc :

x	0		$\alpha = \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$g(0)$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$g(1)$

$g(0) = f(0) = \frac{4}{\pi}\arctan(0) = 0$

$g(1) = f(1) - 1 = \frac{4}{\pi}\arctan(1) - 1 = \frac{4}{\pi}\frac{\pi}{4} - 1 = 0$

sur $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$

g continue (car dérivable) sur $[0,1]$ donc d'après le Th de Weierstrass,

$$g([0,1]) = [g(0), g(\alpha)]$$
$$= [0, g(\alpha)]$$

Donc $\forall x \in [0,1]$, $g(x) \geq 0$
$$\Leftrightarrow f(x) \geq x$$

On a $g(0) = g(1) = 0$

g strictement croissante sur $]0,\alpha[$ donc injective
g strictement décroissante sur $]\alpha,1[$ donc injective

Déf :
x_0 est un point fixe de f
$\Leftrightarrow f(x_0) = x_0$

donc 0 et 1 sont des points fixes de f.

2) Variations de f :

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

si f croissante $\Rightarrow u_n$ monotone

$I = [0,1]$, I est stable par $f \Leftrightarrow f[0,1] \subset [0,1]$

Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe
$0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Pour $n=0$, $u_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

Soit $n \geqslant 0$, tel que u_n existe et $u_n \in [0,1]$

$u_{n+1} = f(u_n) \in f([0,1]) \subset [0,1]$
(existe)

donc $u_{n+1} \subset [0,1]$

Donc d'après le Th de récurrence,
$\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 1$

La suite $(u_n)_n$ est donc bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$u_n \in [0,1]$

Conjecture : $(u_n)_n$ croissante et converge vers 1.

Démo :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$

Or, g positive sur $[0,1]$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = f(u_n) - u_n \geqslant 0$

Donc $(u_n)_n$ croissante
Or, $(u_n)_n$ bornée

$\Big\}$ $(u_n)_n$ convergente

Donc on peut passer aux limites : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

$(u_{n+1})_n$ est une suite extraite de $(u_n)_n$ donc elle converge vers la même limite.

Δ ⇒ Si f continue et $(u_n)_n$ converge vers l alors l est un point fixe de f

Puisque f continue en l (car continue sur $[0,1]$), on peut dire :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = f(l) \quad (u_n \text{ de limite } l)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = u_0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 < u_0 < u_1 \leq \lim_{n\to+\infty} u_n$$

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

[fin d'exercice].

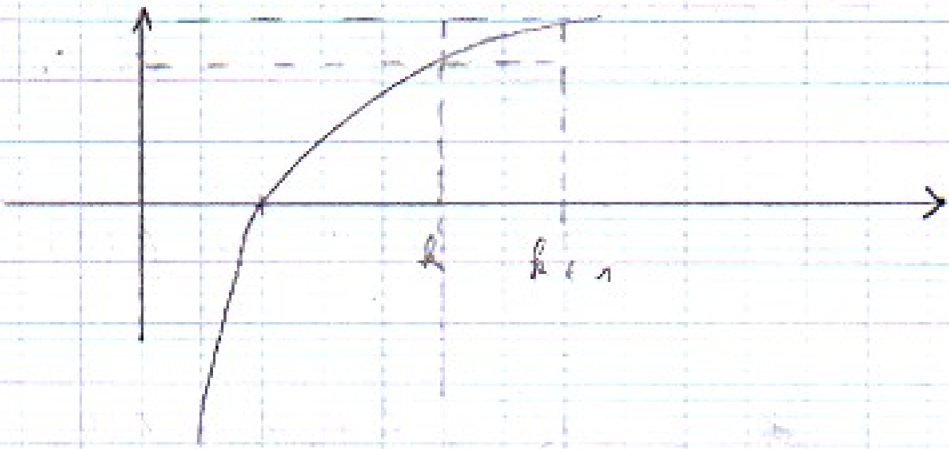
Exercice : 1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

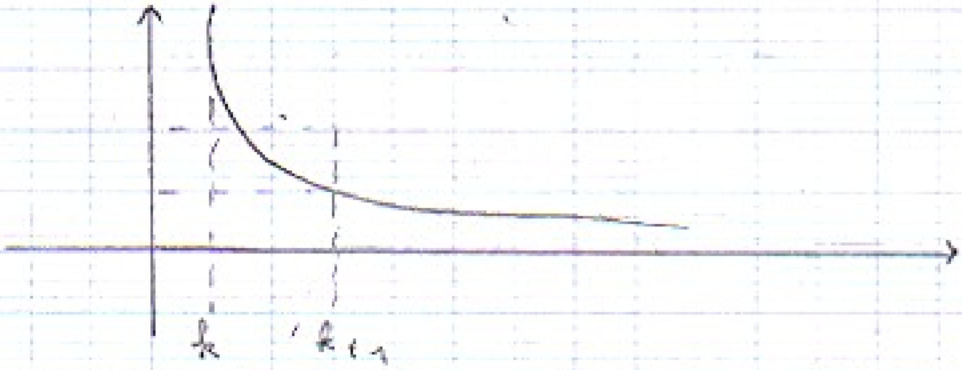
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Etudier la nature de $(u_n)_{n \geqslant 1}$





$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \left[\ln(x)\right]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$$

$\frac{1}{k+1}$ est l'aire du "petit rectangle"

$\frac{1}{k}$ est l'aire du "grand rectangle"

$\forall k \in \mathbb{N}^*,$

$k \leqslant x \leqslant k+1 \iff \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{k+1}$

$\Rightarrow \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx$

$\Rightarrow \frac{1}{k} \geqslant \ln(k+1) - \ln(k) \geqslant \frac{1}{k+1}$

Si on pose $f(x) = \ln(x)$ sur $[a, b] = [k, k+1]$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

f continue sur $[k, k+1]$
f dérivable sur $]k, k+1[$ (car ln dérivable sur $]0, +\infty[$)

Th des A.F. (précédent)

$\Rightarrow \exists\, c \in]k, k+1[$, tel que :

$f(k+1) - f(k) = \ln(k+1) - \ln(k) = \frac{1}{c}$

donc $k < c < k+1$

donc $\frac{1}{k} > \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{k+1}$

donc $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{c} \leqslant \frac{1}{k}$

donc $\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$

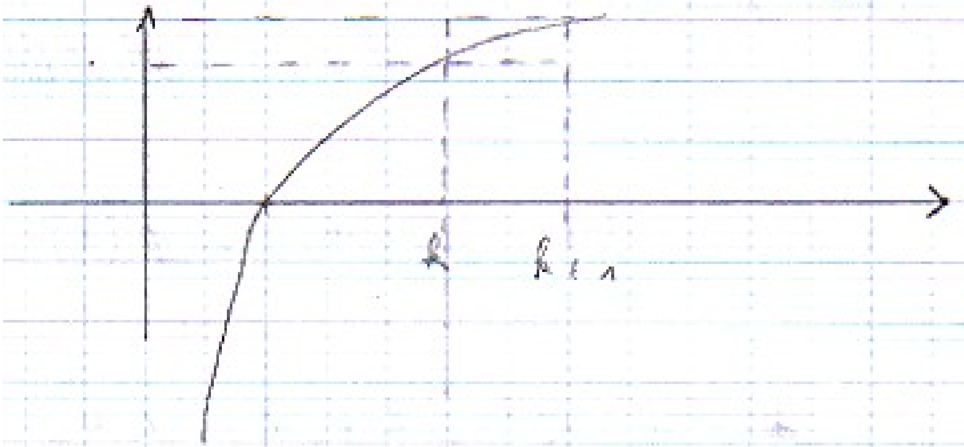
Exercice : 1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

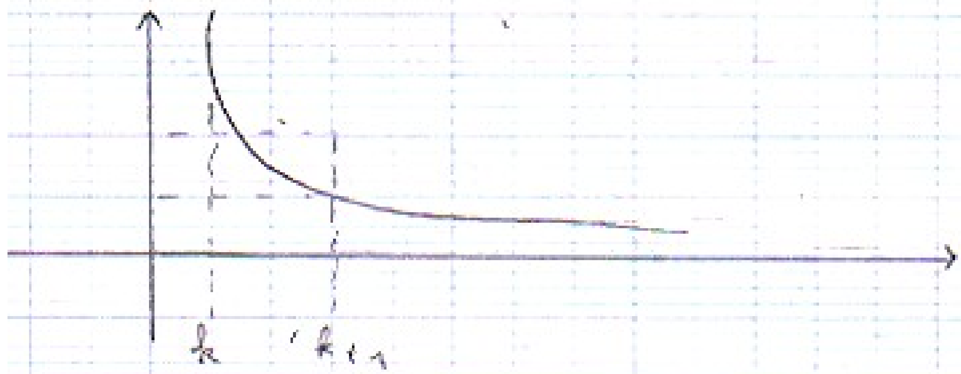
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k}$$

2) Soit la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$$

Etudier la nature de $(u_n)_{n \geqslant 1}$





$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \left[\ln(x)\right]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln(k)$$

$\frac{1}{k+1}$ est l'aire du "petit rectangle"

$\frac{1}{k}$ est l'aire du "grand rectangle"