

Devoir 1

Exercice 1

Donner les pgcd et ppcm de P et Q dans les cas suivants :

1. $P(X) = X^3 + X^2 + 7X + 7$ et $Q(X) = X^3 + X^2 - 4X - 4$.
2. $P(X) = X^3 + X^2 - 9X - 9$ et $Q(X) = X^4 - 10X^2 + 9$.
3. $P(X) = X^2 + 1$ et $Q(X) = X^4 - 2X^2$.

Exercice 2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a, b \in \mathbb{R}$

Quel est le reste de la division euclidienne de $X^n + X + b$ par $(X - a)^2$?

Exercice 3

On considère le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$.

1. Montrer que $j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ est racine de P dans \mathbb{C} et donner l'autre racine de P .
2. Montrer que cette dernière racine est le carré de l'autre.
3. Calculer j^3 .

En déduire j^{3m+1} , j^{3m+2} et j^{3m} pour $m \in \mathbb{N}$.

4. En déduire que P divise $X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ pour tout $n, m, p \in \mathbb{N}$.

Indication : Remarquer que $P(X) = (X - j)(X - j^2)$ divise un polynôme Q si et seulement si j et j^2 sont racines de Q .

5. Soient $A, B \in K[X]$ avec $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Montrer que si P divise $A(X^3) + XB(X^3)$ alors $A(1) = B(1) = 0$.