Correction du Devoir 1

Exercice 1

1. Par l'algorithme d'Euclide, on obtient
   $P(X)=Q(X)+11X+11$
   $Q(X)=(11X+11)\left(\frac{1}{11}X^2-\frac{4}{11}\right)$
   Donc le dernier reste non nul est $11X+11$.
   D'où $11X+11=11(X+1)$ est un pgcd de P et Q et donc $D(X)=X+1$ aussi.

   Ainsi il existe $U,V\in IR[X]/\, P=UD$ et $Q=VD$ que l'on peut calculer :
   $U(X)=X^2+7$ et $V(X)=X^2-4$.
   Un ppcm M de P et Q vérifie $MD=PQ=UVD^2$ et donc
   $M(X)=U(X)V(X)D(X)=X^5+X^4+3X^3+3X^2-28X-28$ est un ppcm de P et Q.

2. Par l'algorithme d'Euclide, on obtient $Q(X)=P(X)(X-1)$.
   Donc P divise Q.
   Donc P est un pgcd de P et Q.
   Ainsi l'égalité $DM=PQ$ avec $P=D$ donne Q est un ppcm de P et Q.

3. Par l'algorithme d'Euclide, on obtient $Q(X)=P(X)(X^2-3)+3$.
   Donc 3 est un pgcd de P et Q et donc $D=1$ aussi.
   L'égalité $DM=PQ$ avec $D=1$ permet de conclure que
   $M(X)=P(X)Q(X)=X^6-X^4-2X^2$ est un pgcd de P et Q.

Exercice 2

Notons $P(X)=X^n+X+b$.
La division euclidienne de P par $(X-a)^2$ s'écrit $P(X)=Q(X)(X-a)^2+R(X)$.
Or $\deg(R)<2$ donc on peut écrire $R(X)=cX+d$.

- D'où en appliquant cette relation à a, on obtient $a^n+a+b=P(a)=ca+d$.
- On va dériver pour trouver une deuxième équation :
  $nX^{n-1}+1=P'(X)=Q'(X)(X-a)^2+2Q(X)(X-a)+c$
  En a, on obtient $na^{n-1}+1=P'(a)=c$.

D'où $\begin{cases} c=na^{n-1}+1 \\ ca+d=a^n+a+b \end{cases}$ et donc $\begin{cases} c=na^{n-1}+1 \\ d=a^n(1-n)+b \end{cases}$.

Donc $R(X)=(na^{n-1}+1)X+a^n(1-n)+b$.

Exercice 3

1. $\Delta = 1-4=-3$ donc les racines de P sont $j=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

2. $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1-3-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$.

3. $j^2+j+1 \Rightarrow j^2 = -j-1 \Rightarrow j^3 = j\times(-j-1) = -j^2-j = -(-j-1)-j = 1$

$j^{3m+1} = j^{3m}.j = \left(j^3\right)^m.j = 1^m.j = j$

$j^{3m+2} = j^{3m}.j^2 = \left(j^3\right)^m.j^2 = 1^m.j^2 = j^2$

$j^{3m} = \left(j^3\right)^m = 1^m = 1$

4. En déduire que P divise $Q(X) = X^{3n+2} + X^{3m+1} + X^{3p}$ pour tout $n, m, p \in IN$.

$P(X) = (X-j)(X-j^2)$ divise Q

si et seulement si $X-j$ et $(X-j^2)$ divisent Q

si et seulement si j et j^2 sont racines de Q..

Or $\begin{aligned} &Q(j) = j^{3n+2} + j^{3m+1} + j^{3p} = j^2+j+1=0 \\ &Q(j^2) = j^{2\times(3n+2)} + j^{2\times(3n+1)} + j^{2\times 3p} = j^{3(2n+1)+1} + j^{3(2n)+2} + j^{3(2p)} = j+j^2+1=0 \end{aligned}$

Donc P divise Q.

5. Si P divise $A(X^3)+XB(X^3)$

Alors j, j^2 sont racines de $A(X^3)+XB(X^3)$.

D'où $\begin{cases} A\left(j^3\right) + jB\left(j^3\right) = 0 \\ A\left(\left(j^2\right)^3\right) + j^2 B\left(\left(j^2\right)^3\right) = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} A(1) + jB(1) = 0 & L_1 \\ A(1) + j^2 B(1) = 0 & L_2 \end{cases}$

Ainsi $\begin{cases} (j-1)A(1) = 0 & jL_1 - L_2 \\ A(1) + jB(1) = 0 & L_1 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} A(1) = 0 \\ B(1) = 0 \end{cases}$.