Devoir 2

Exercice 1

Décomposer en produit de facteurs irréductibles dans C puis dans IR :

1. $P(X) = X^3 + 2X^2 + 3X - 6$,
2. $Q(X) = X^4 + 1$,
3. $R(X) = X^4 + X^2 + 1$,
4. $S(X) = X^6 - 1$.

Exercice 2

1. On considère la famille des droites $D_\lambda : x + \lambda y + 1 = 0$ où $\lambda \in IR$.
   - 1.1. Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.
   - 1.2. Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui, donner une équation de cette droite.
   - 1.3. Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui, donner une équation de cette droite.
   - 1.4. Parmi toutes ces droites, y en a-t-ils qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x - 3y + 1 = 0$? Si oui, donner des équations de ces droites.
2. On considère la famille de droites $D_m : (2m-1)x + (3-m)y + m + 1 = 0, \ m \in IR$.
   Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une perpendiculaire à $(\Delta) : x + y - 1 = 0$? Si oui, laquelle ?

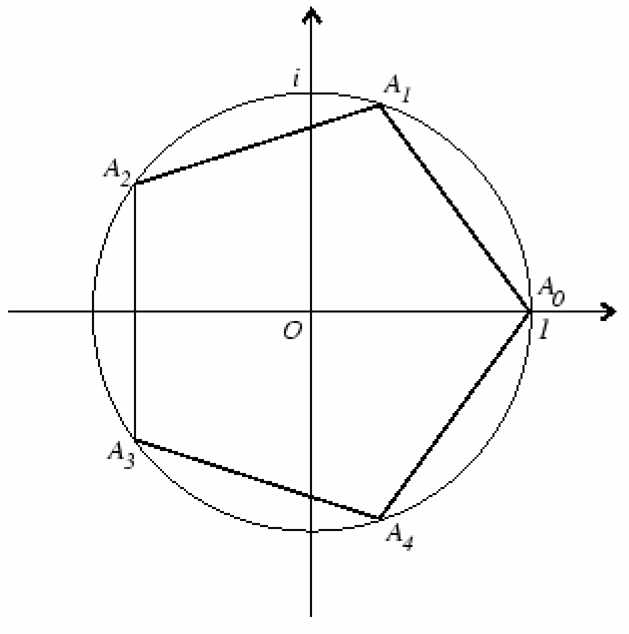
Exercice 3

On considère les trois points de P : $A(2,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,-5)$.

1. Dessiner le triangle puis calculer son aire.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G du triangle ABC..
3. Vérifier que H, Ω et G sont alignés et qu'en particulier $\overrightarrow{\Omega G} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

Exercice 4

Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes C.



1. **Donner les affixes $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ des points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4. Montrer que $\omega_k = \omega_1{}^k$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$.**
2. **En remarquant que $1 - z^5 = (1-z)(1+z+z^2+z^3+z^4)$ Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1{}^2 + \omega_1{}^3 + \omega_1{}^4 = 0$.**
3. **En déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.**
4. **On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$).**
5. **On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle C de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de C avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.**
6. **Application : Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.**