UNIVERSITÉ PAUL CÉZANNE **2005-2006**

TD 1 – M102 – Géométrie et polynômes

On désigne par $\mathbb{K}$ un des ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans les exercices 1,2 et 3, on se propose de retrouver des "identités remarquables" bien connues, et de les utiliser dans des situations "classiques".

Exercice 1. *i) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{K}$:*

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

On appelle $(a-b)$ la quantité conjuguée de $(a+b)$.

ii) Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ ($a, b \in \mathbb{R}$). Si $z \neq 0$, mettre z^{-1} sous la forme $a' + ib'$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$. Mettre $\frac{2-3i}{1-2i}$ sous la forme $a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

iii) Soit $x = a + b\sqrt{7}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Si $x \neq 0$, mettre x^{-1} sous la forme $a' + b'\sqrt{7}$ avec $a', b' \in \mathbb{Q}$. Mettre $\frac{-3-\frac{\sqrt{5}}{2}}{2\sqrt{5}-\frac{2}{3}}$ sous la forme $a + b\sqrt{5}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

iv) Plus généralement, soit $d \in \mathbb{Q}$ tel que $d < 0$ ou $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. Si $d > 0$, on pose $\delta = \sqrt{d}$, et si $d < 0$, on pose $\delta = i\sqrt{-d}$. Soit $\mathcal{E} = \{a + \delta b : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que si $x \in \mathcal{E}$ est non nul, alors $x^{-1} \in \mathcal{E}$.

v) Simplifier $\frac{2X^3+X+(2X^2+1)\sqrt{X^2+1}}{\sqrt{X^2+1}+X}$.

Exercice 2. *i) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$:*

$$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}.$$

Se persuader que cette identité est vraie "plus généralement", à condition que $ab = ba$. Que retrouve-t-on pour $n = 1$?

ii) Calculer $1 + x + x^2 + \ldots + x^n$ et $x + x^2 + \ldots + x^n$ (discuter selon que $x = 1$ ou non).

iii) On rappelle que pour $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \in \mathbb{C}$. Calculer $1 + e^{i\theta} + \ldots + e^{ni\theta}$ pour $\theta \neq 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). En déduire que:

$$\sin\theta + \sin 2\theta + \ldots + \sin n\theta = \frac{\sin\frac{n\theta}{2}\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Exercice 3. *i) Pour $a, b \in \mathbb{K}$, développer $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)^2 - (a-b)^2$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, $(a+b)^4$, $(a-b)^4$.*

ii) On désigne par C_n^k le nombre de sous-ensembles de cardinal k d'un ensemble de cardinal n (pour $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$). Montrer que $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Retrouver *la formule du binôme de Newton:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$$

pour tout $a, b \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}$. *Se persuader que cette formule est vraie "plus généralement" lorsque* $ab = ba$.

iii) *Qu'obtient-on lorsque* $a = b = 1$*? Lorsque* $a = 1$, $b = -1$*?*

iv) *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$ *le polynôme* $P = (1+X)^n$. *Développer* P *en utilisant la formule du binôme de Newton. Calculer* P' *de 2 manières différentes. En déduire la valeur de* $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k$ *et de* $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k kC_n^k$.

Exercice 4. *Développer les expressions suivantes:*

- $(a+b+c)^2$,
- $(a+b+c+d)^2$,
- $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$,
- $(a+b+c)^3$,
- $(a+b+c)^4$.

Exercice 5. *i)* *Soit* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *On pose* $P(x) = ax^2 + bx + c$ *(*$x \in \mathbb{R}$*). Discuter le signe de* $P(x)$.

ii) *Pour tout* $a, b \in \mathbb{R}$, *montrer que:*

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$
$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Exercice 6. *a – Soit* $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. *On rappelle que, par convention, le degré du polynôme nul est* $-\infty$. *Montrer que:*

- $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$,
- $\deg(P+Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$, *et que si* $\deg P \neq \deg Q$, *alors il y a égalité,*
- $\deg(P \circ Q) = \deg P \deg Q$ *si* Q *n'est pas le polynôme nul.*

b – Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ *qui vérifient la condition donnée:*

i) $P + P' = P^2$,

ii) $P(X^2) = P(X+1)P'(X) + P'(X+1)P(X)$,

iii) $3P(X) - P'(X) = 3X^3 - 2X + 3$,

iv) $XP'(X) + P(X) = X^n - 1$ *(*$n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$*).*

c – Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, *et* $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n \in \mathbb{K}[X]$. *Quel est le degré de* P*?*