Exercice 1. On considère les trois polynômes à coefficients réels :

$$P(X) = X, \quad Q(X) = 3 - X^2, \quad R(X) = 33X^3 + 11X^5.$$

Effectuer les opérations élémentaires qui suivent, en précisant à chaque fois le degré et le coefficient dominant du polynôme obtenu.

1. $3Q$, $\frac{2}{11}R$;

2. $P + Q$, $R - P + 2Q$;

3. PQ, QR ;

4. $P^2 + Q$.

Exercice 2. Trouver les racines et factoriser les polynômes suivants.

1. $X^2 - 3X + 2$ **2.** $X^2 + 2X - 1$ **3.** $3X^2 + 5X + 1$
4. $X^2 + X\sqrt{3} + \frac{1}{2}$ **5.** $X^2 - X - 1$ **6.** $X^2 - 2X - 1$
7. $X^2 + X + 1$ **8.** $X^2 + \frac{2}{5}X + \frac{1}{9}$ **9.** $X^2 + iX - 2$
10. $X^2 - i$ **11.** $X^2 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ **12.** $X^2 + 2X - i$
13. $X^2 + 1 + 2i$

Exercice 3. Évaluer le polynôme $P(X) = 2+3X-X^2$ en $0, 1, \frac{2}{3}, -1, 3$, tracer la courbe représentative de P, préciser son extrêmum et son axe de symétrie.

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ (traiter d'abord les cas $n = 1, 2, 3$).

1. Montrer que $X^{2n} - 1$ et $X^{2n+1} + 1$ sont divisibles par $X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$

2. Montrer que $X^{2n} - 1$ est divisible par $X - 1$.

3. Montrer que $X^{2n} - 1$ est divisible par $X^2 - 1$.

Exercice 5. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. À quelle condition le polynôme $P(X) = b + aX^2 + X^5$ est-il divisible, dans $\mathbb{C}[X]$, par $Q(X) = 1 + cX + X^2 + X^3$?

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer en fonction des valeurs $P(a)$ et $P(b)$ le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$ (on distinguera le cas $a \neq b$ du cas $a = b$).

Exercice 7. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que le reste de la division euclidienne de P par $1 - X$, $1 + X$ et $2 + X$ soit toujours égal à 3.

Exercice 8. **1.** Énoncer le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{K}[X]$. (où $\mathbb{K}$ designe $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

2. Effectuer la division euclidienne de A par B dans chaqu'un des cas suivants :

(a) $A = X^5 - 3X^3 + X^2 + X + 1$, $B = X^3 + 1$.

(b) $A = 2X^4 + X^2 + 3$, $B = X^2 - 2$.

(c) $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$, $B = X^2 + 1$.

(d) $A = X^n - 1$ et $B = X - 1$, pour tout entier n.

Exercice 9. Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

1. Rapeller la définition d'un pgcd de A et de B. Le pgcd est-il unique ?
2. Soit D un pgcd de A et de B. Montrer que, si C est un diviseur commun de A et de B, alors C divise D.
3. Soit $D \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur commun de A et de B, c'est-à-dire tel que $A = CD$ et $B = ED$ pour C, E deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.
   Montrer que D est un pgcd de A et B si et seulement si C et E sont étrangers.

Exercice 10.

1. Enoncer le théorème de Bézout. La réciproque est-elle vraie ?
2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que les polynômes $P + X + 1$ et $(X-1)P + X^2 + 1$ sont étrangers.
3. Selon les polynômes P, quels sont les pgcd de $P + X + 2$ et $(X-1)P + X^2 - 1$ possibles ?

Exercice 11.

1. Déterminer D le pgcd unitaire des polynômes A et B :

   (a) $A = 2X^4 + 3X^2 + 5X + 1$, $B = X^3 + 1$.

   (b) $A = X^4 + X^2 + 3X + 1$, $B = X^2 + X + 1$.

   (c) $A = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1$, $B = X^3 - X^2 + X - 1$.

2. Trouver dans chaqu'un des cas précédents un couple de polynômes $(U, V) \in \mathbb{R}[X]$ tels que $UA + VB = D$.
3. Déterminer l'ensemble des couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ solutions de l'équation

$$(X^4 + X^2 + 3X + 1)P + (X^2 + X + 1)Q = X + 1$$