TD 3 – M102 – Géométrie et Polynômes

Exercice 1. Soit f un polynôme de degré n de $\mathbb{R}[X]$. Soit $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. On pose $b_0 = f(a_0), b_1 = f(a_1), ..., b_n = f(a_n)$. Pour tout entier i, $0 \leq i \leq n$, on considère les polynômes :

$$L_i = \frac{\prod_{j=0,j\neq i}^{n}(X - a_j)}{\prod_{j=0,j\neq i}(a_i - a_j)}$$

(i) Pour $n = 3$, écrire les polynômes L_0, L_1, L_2, L_3.

(ii) Calculer pour tout $0 \leq i, k \leq n$, $L_i(a_k)$.

(iii) On considère le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$. Vérifier que pour tout $k \leq n$, a_k est une racine du polynôme $f - P$. En déduire que $f = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.

(iv) Montrer qu'il existe un unique polynôme f de degré au plus 3 tel que $f(0) = 6, f(1) = 2, f(2) = 0, f(3) = 6$ et donner son expression.

Exercice 2.

(i) Enoncer le lemme de Gauss.

(ii) Montrer que si f et g sont deux polynômes etrangers qui divisent un polynôme h, alors fg divise h.

Exercice 3.

(i) Décomposer les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X^3 - X^2 - X - 2, Q = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1, R = X^3 - 2X^2 + X - 2, S = X^2 + 3X + 4$$

Sont-ils irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$? Déterminer un pgcd des polynômes P et Q, puis Q et R, et enfin R et S.

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner selon les valeurs de a la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $X^4 + (a + 1)X^2 + a$. Pour quelles valeurs de a, est-il premier avec $X^3 - 3X^2 + 2X$.

Exercice 4. Soit f un polynôme de $R[X]$ et a une racine d'ordre k de f. Démontrer par récurrence que pour tout $0 \leq i \leq k$, $f^{(i)}(a) = 0$.

Exercice 5.

(i) Soit $P = a_nX^n + ... + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit p et q deux entiers premiers entre eux tels que p/q soit une racine de P.
Montrer que p divise a_0 et que q divise a_n.

(ii) En utilisant la question précédente, montrer que le polynôme $2X^3+X^2-X+1$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

Exercice 6.

(i) Enoncer la formule de Taylor.

(ii) Ecrire les polynômes suivants sous la forme $a_n(X-1)^n + ... + a_1(X-1) + a_0$

$P = X^3+X^2+3X+1, Q = X^4-X^3+X^2-X+2, R = (X+1)^n, S = X^n+....+X+1$

(iii) Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(1) = 2, P'(1) = 3, P''(1) = 4, \ et\ \forall n \leq 3, P^{(n)}(1) = 0$$

Exercice 7. On considère deux polynômes f et g à coefficients réels. Les assertions suivantes sont vraies ou fausses, choisissez et justifiez votre réponse en vous appuyant sur un résultat du cours, une démonstration ou un exemple.

(1) Si f et g sont premiers entre eux sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, alors ils n'ont pas de racine complexe commune.
(2) Si f et g n'ont pas de racine complexe commune, alors ils sont premiers entre eux sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes.
(3) Si f et g sont premiers entre eux sur le corps $\mathbb{C}$ des complexes, alors ils n'ont pas de racine réelle commune.
(4) Si f et g n'ont pas de racine réelle commune, alors ils sont premiers entre eux sur $\mathbb{C}$.
(5) Si f et g sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$, alors ils n'ont pas de racine complexe commune.
(6) Si f et g n'ont pas de racine complexe commune, alors ils sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$.
(7) Si f et g sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$, alors ils n'ont pas de racine réelle commune.
(8) Si f et g n'ont pas de racine réelle commune, alors ils sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$.
(9) Si f et g sont premiers entre eux sur $\mathbb{R}$, alors ils le sont sur $\mathbb{C}$.
(10) Si f et g sont premiers entre eux sur $\mathbb{C}$, alors ils le sont sur $\mathbb{R}$.