TD 5 – M102 – Géométrie et Polynômes

Exercice 1 Décomposer en élément simples dans $\mathbb{R}(X)$ et dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

$$A = \frac{(X^2+1)}{X(X-1)(X-2)},\ B = \frac{X^4+X^3-X^2+X+1}{X^3+2X^2+X}$$

$$C = \frac{X^4+X^3+X^2+X+1}{(X^2+1)^3},\ D = \frac{X^3+2}{(X+1)(X^2+X+1)^2}$$

Exercice 2.

(1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes à l'ordre 3 du polynômes $P = 2X^4+3X^3-3X^2+4X-2$ par $Q = X^2+2X-2$.

(2) On considère la fraction rationnelle suivante

$$f = \frac{2X^4-3X^3+4X^2-X+2}{X^5-3X^4+4X^3-4X^2+3X-1}$$

 (a) Déterminer les pôles réels et complexes de f, en précisant leur ordres de multiplicité.

 (b) Donner les décompositions de f en éléments simples dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

(3) Trouver une primitive de la fonction $f(x) = \dfrac{2X^4-3X^3+4X^2-X+2}{X^5-3X^4+4X^3-4X^2+3X-1}$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Le but de cet exercice est de décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $f = \dfrac{1}{(X^n-1)}$.

(1) Quels sont les pôles complexes de f? Préciser leur multiplicité. Quels sont les pôles réels? (discuter selon la parité de n).

(2) En déduire que f peut sécrire sous la forme

$$f = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(X - e^{\frac{i2\pi k}{n}})}$$

Calculer les coefficients a_k et donner la décomposition de f dans $\mathbb{C}(X)$.

(3) Soit $z = e^{\frac{i2\pi k}{n}}$ un pôle complexe de f. Vérifier que le polynôme $(X-z)(X-\overline{z})$ appartient à $\mathbb{R}[X]$. Donner son expression.

(4) Selon la parité de n, donner la décomposition du polynôme X^n-1 en facteurs irreductibles de $\mathbb{R}[X]$.

(5) Déterminer la décomposition de f dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice 4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, un polynôme unitaires de racines complexes $\alpha_1, ..., \alpha_r$ de multiplicités respectives $m_1, ..., m_r$. On veut déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P.

(1) Donner une formule permettant de calculer la dérivée du produit de r polynômes, $(P_1...P_r)'$. Appliquer ce résultat pour calculer P'.

(2) Quels sont les pôles de la fraction rationnelle P'/P.

(3) En déduire la formule de décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{X-\alpha_j}.$$