Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme/Centre de Montperrin

Partiel M102 : Polynômes et Géométrie

Lundi 9 janvier 2006 Durée : 3 heures.

Le sujet comporte deux parties indépendantes.
Il sera tenu grand compte du soin de la rédaction.

Partie I

1. Question de cours : Énoncer avec soin le théorème de division euclidienne sur $\mathbb{R}[X]$ (polynômes à coefficients réels). (Les étudiants qui le souhaitent pourront aussi écrire ce même théorème pour les polynômes à coefficients dans un corps K quelconque).

2. On pose $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $Q_1 = X^3 + 1$ et $Q_2 = X^2 + 1$.

3. Effectuer la division euclidienne de P par Q_1 et par Q_2. Que remarque-t-on ?

4. Décomposer Q_1 et Q_2 en produits de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{C}$. (On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.)

5. Montrer que Q_1 et Q_2 sont premiers entre-eux ou étrangers.

6. Montrer que P se décompose en produit de trois polynômes irréductibles et unitaires dans $\mathbb{R}[X]$. Donner explicitement cette décomposition.

7. Donner la décomposition de P sur $\mathbb{C}$ en produits de facteurs irréductibles.

Partie II

1. On considère le polynôme $P = aX^2 + bX + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(*a*) Calculer le polynôme dérivée P'.

(*b*) Trouver le reste R de la division euclidienne de P par P'.

(*c*) Interpréter la relation $R = 0$.

2. Soit Q, un polynôme à coefficients réels ou complexes.

(*a*) Question de cours : Rappeler le lien entre multiplicité des racines de Q et racines des dérivées successives de Q.

(*b*) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

– Q admet une racine multiple dans $\mathbb{C}$.
– Q et Q' admettent une racine commune dans $\mathbb{C}$.
– Q et Q' ne sont pas premiers entre-eux.

Suite au verso.

3. On considère le polynôme $Q = X^3 - pX - q$, où p, q sont réels ou complexes.

(a) Calculer le polynôme dérivée Q'.

(b) Montrer que le reste T de la division euclidienne de Q par Q' s'écrit
$$T = -\frac{2p}{3}X - q.$$

(c) On suppose que $p = 0$ et $q \neq 0$. Montrer que Q et Q' sont premiers entre-eux.

(d) On suppose que $p = 0$ et $q = 0$. Montrer que Q admet une racine triple. Laquelle ?

(e) On suppose que $p \neq 0$. Calculer le reste U de la division euclidienne de Q' par T.

(f) Conclure que Q admet une racine multiple si et seulement si $4p^3 - 27q^2 = 0$.