Faculté des Sciences et Techniques de Saint-Jérôme/Centre de Montperrin

Corrigé du Partiel M102. Polynômes et Géométrie

Mardi 8 novembre 2005 Durée : 1 heure 30.

Partie I

1. Question de cours : Soient f et g deux polynômes réels (resp. à coefficients dans un corps K). Alors il existe q et r dans $\mathbb{R}[X]$ (resp. dans $K[X]$) tels que

$$f = gq + r \quad \text{et} \quad \deg(r) < \deg(g),$$

q est le quotient et r le reste de la division euclidienne de f par g, ils sont uniques.

On pose $P = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, $Q_1 = X^3 + 1$ et $Q_2 = X^2 + 1$.

3. $P = Q_1(X^2 + X + 1)$ et $P = Q_2(X^3 + X^2) + X + 1$.

On voit que P est divisible par Q_1 mais non par Q_2.

4. Sur $\mathbb{R}$, on a

$Q_1 = (X + 1)(X^2 - X + 1), \quad Q_2 = X^2 + 1.$

Sur $\mathbb{C}$, on a

$Q_1 = (X + 1)(X + j)(X + j^2), \quad Q_2 = (X + i)(X - i).$

5. On voit que Q_1 et Q_2 n'ont pas de facteur commun et sont donc premiers entre-eux. On peut aussi appliquer l'algorithme d'Euclide :

$X^3 + 1 = X(X^2 + 1) - X + 1$, soit $Q_1 = XQ_2 + R_1$, où $R_1 = -X + 1$.

$(X^2 + 1) = (-X - 1)(-X + 1) + 2$, soit $Q_2 = (-X - 1)R_1 + R_2$, où $R_2 = 2$.

Le dernier reste non nul est une constante.

6. Sur $\mathbb{R}$, P se décompose en un produit de trois facteurs irréductibles unitaires :

$P = (X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + 1).$

7. Sur $\mathbb{C}$, P se décompose en un produits de cinq facteurs irréductibles unitaires du premier degré :

$P = (X + 1)(X + j)(X + j^2)(X + i)(X - i).$

Partie II

1. On considère le polynôme $P = aX^2 + bX + c$, où $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

(*a*) On a $P' = 2aX + b$.

(*b*) Le reste R de la division euclidienne de P par P' est la constante $-\frac{4a}{b^2} + c$.

(*c*) On a $R = -\frac{4a}{b^2} + c = 0$ si et seulement si $b^2 - 4ac = 0$. C'est à dire que le discriminant est nul. Il est connu que c'est le cas d'une racine double.

2. Soit Q, un polynôme à coefficients réels ou complexes.

(*a*) Question de cours : Une racine α de Q est d'ordre k, si et seulement si
$$Q(\alpha) = Q'(\alpha) = \ldots = Q^{k-1}(\alpha) = 0, \text{ et } Q^k(\alpha) \neq 0.$$

(*b*)
- Si α est une racine multiple (d'ordre $k \geq 2$), alors $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = 0$.
- Si Q et Q' admettent une racine commune α alors $(X - \alpha)$ divise Q et Q' qui ne sont donc pas premiers entre-eux.
- Si Q et Q' ne sont pas premiers entre-eux, ils ont un facteur commun, lequel a une racine α. Alors $Q(\alpha) = Q'(\alpha) = 0$, et α est une racine de Q d'ordre $k \geq 2$.

3. On considère le polynôme $Q = X^3 - pX - q$, où p, q sont réels ou complexes.

(*a*) On a $Q' = 3X^2 - p$.

(*b*) On a $X^3 - pX - q = (\frac{1}{3}X)(3X^2 - p) + T$, où $T = -\frac{2p}{3}X - q$.

(*c*) Si $p = 0$ et $q \neq 0$, T est une constante non nulle. D'après l'algorithme d'Euclide, Q et Q' sont premiers entre-eux.

(*d*) Si $p = q = 0$, alors $Q = X^3$, admet $X = 0$ comme racine triple.

(*e*) On suppose que $p \neq 0$. Divisant Q' par T, on a
$$3X^2 - p = (-\frac{9}{2p}X + \frac{27q}{4p^2})(-\frac{2p}{3}X - q) + U, \text{ où } U = \frac{27q^2}{4p^2} - p.$$

(*f*) D'après la question précédente, Q admet une racine multiple si et seulement si Q et Q' ne sont pas premiers entre-eux. Ainsi, le dernier reste non nul de l'algorithme d'Euclide ne doit pas être une constante. Il faut donc avoir $T = 0$ (soit $p = q = 0$) ou bien $U = 0$, soit $\frac{27q^2}{4p^2} - p = 0$, ou encore $4p^3 - 27q^2 = 0$. Notons que si $p = 0$, alors $q = 0$, si et seulement si $4p^3 - 27q^2 = 0$. Donc, dans tous les cas,
$$Q \text{ admet une racine multiple si et seulement si } 4p^3 - 27q^2 = 0.$$