M102 – Géométrie et polynômes – 2007/2008

Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des réels, soit le corps des nombres complexes.

Exercice 1. a) Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{K}$ on a

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

b) Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. Trouver l'expression algébrique de z^{-1}. En déduire la forme algébrique de $\frac{2-3i}{1-2i}$.
c) Soit $x = a + b\sqrt{5}$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$. Ecrire x^{-1} sous la forme $c + d\sqrt{5}$ avec $c, d \in \mathbb{Q}$.
d) Simplifiez $\frac{2X^3+X+(2X^2+2)\sqrt{X^2+1}}{\sqrt{X^2+2-X}}$.

Exercice 2. a) Soit a, b, c des réels, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(X) = aX^2 + bX + c$. Etudier le signe de P.
b) Pour tout a, b réels montrer que

$$ab \leq \frac{a^2+b^2}{2},$$
$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2).$$

Exercice 3. Soit a, b des éléments de $\mathbb{K}$.
a) Développer les expressions suivantes

$$(a+b)^2, (a-b)^2, (a+b)^3, (a-b)^3.$$

b) Calculer $1 + a + a^2$ puis $1 + a + a^2 + a^3$.
c) En déduire par récurrence la valeur de $1 + a + a^2 + \ldots a^n$ pour n entier.

Exercice 4. a)En utilisant l'exercice précedent factoriser $X^n - 1$ sur $\mathbb{C}$.
b) En déduire $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
c) Calculer également $\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(\dfrac{k\pi}{n} + \theta\right)$.
d) On note $\omega = e^{2i\pi/n}$. Calculer $\displaystyle\prod_{0 \leq k < n, k \neq l} (\omega^k - \omega^\ell)$.

Exercice 5. On considère $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé centré en O, et les deux points A et B:

$$A = (1,0); B = (3,2).$$

a) Calculer l'équation du cercle de centre A et de rayon 2.
b) Calculer l'équation de la droite (OB).
c) Trouver les points d'intersection de la droite et du cercle.

Exercice 6. a) Montrer que toute droite du plan a pour équation complexe : $az + \overline{az} = b$ avec $a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{R}$.
b) Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, a, b non tous deux nuls. Discuter la nature de $E = \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } az + b\overline{z} = c\}$.

Exercice 7. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ distincts. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\{a, b, c\}$ est un triangle équilatéral.
- j ou j^2 est racine de $az^2 + bz + c = 0$.
- $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.
- $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

Exercice 8. On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé. On considère les trois points A, B, C suivant

$$A = (0,1,0); B = (1,0,1); C = (0,0,1).$$

a)Calculer l'équation du plan contenant ces trois points.
b) On considère le plan d'équation $z = 1$. Trouver son intersection avec le plan précédent.