TD n°2
Degré, Division Euclidienne et Divisibilité de polynômes

Exercice 1

1. Soit P, Q deux polynômes non nuls. Montrer que :
   - $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$,
   - $\deg(P+Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$ et que si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors il y a égalité,
   - $\deg(P \circ Q) = \deg(P)\deg(Q)$.
2. Dans chacun des cas suivants, déterminer les polynômes $P \in IK[X]$ qui vérifient la condition donnée :
   - $P + P' = P^2$,
   - $P(X^2) = P(X+1)P'(X) + P'(X+1)P(X)$,
   - $3P(X) - P'(X) = 3X^2 - 2X + 3$,
   - $XP'(X) + P(X) = X^n - 1 \quad (n \in IN^*)$

Exercice 2

On considère les trois polynômes à coefficients réels :

$$P(X) = X, \quad Q(X) = 3 - X^2, \quad R(X) = 33X^3 + 11X^5.$$

Effectuer les opérations élémentaires qui suivent :

1. $3Q, \dfrac{2}{11}R$;
2. $P+Q, R-P+2Q$;
3. PQ, QR ;
4. $P^2 + Q$.

Exercice 3

Trouver les racines des polynômes suivants :

1. $X^2 - 3X + 2$ 2. $3X^2 + 5X + 1$ 3. $X^2 + \sqrt{3}X + \frac{1}{2}$

4. $X^2 + X + 1$ 5. $X^2 + iX - 2$ 6. $X^2 - i$

Exercice 4

Effectuer la division euclidienne de A .par B dans chacun des cas suivants :

1. $A(X) = X^5 - 3X^3 + X^2 + X + 1, B(X) = X^3 + 1$,
2. $A(X) = 2X^4 + X^2 + 3, B(X) = X^2 - 2$,
3. $A(X) = X^4 - X^3 + 2X^2 - X + 1, B(X) = X^2 + 1$.

Exercice 5

Soit P un polynôme. Sachant que le reste de la division euclidienne de P par $X - a$ est 1 et celui de la division euclidienne par $X - b$ est -1 $(a \neq b)$, quel est le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$?

Exercice 6

Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n + X + 1$ par $(X - 1)^2$.

Exercice 7

Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $X^{2n} - 1$ et $X^{2n+1} + 1$ sont divisibles par $X + 1$ dans $IR[X]$.
2. Montrer que $X^{2n} - 1$ est divisible par $X^2 - 1$.

Exercice 8

Trouver un polynôme réel tel que sa division euclidienne par $1-X, 1+X$ et $2+X$ soit toujours égal à 3.

Exercice 9

Déterminer $a,b \in Z$ de façon à ce que $aX^{n+1} - bX^{n} + 1$ soit divisible par $(X-1)^2$.

Exercice 10

Pour quelles valeurs de m le polynôme $P(X) = (X+1)^m - X^m - 1$ est-il divisible par le polynôme $Q(X) = X^2 + X + 1$.