

## TD 3 – M102 – Géométrie et Polynômes

**Exercice 1.** Énoncer le théorème de Bezout. La réciproque est-elle vraie?

**Exercice 2.** Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes. Montrer par un contre-exemple que s'il existe  $u, v$  tels que  $uf + vg = d$ ,  $d$  n'est pas nécessairement un pgcd de  $f$  et  $g$ .

**Exercice 3.** Soient  $f$  et  $g$  deux polynômes (non nuls). Montrer que  $d$  est un pgcd de  $f$  et de  $g$  si et seulement si  $d$  divise  $f$  et  $g$ , et pour tout  $d'$  divisant  $f$  et  $g$ ,  $d'$  divise  $d$ .

**Exercice 4.** Déterminer le pgcd unitaire  $d$  des couples de polynômes suivants et trouver deux polynômes  $u$  et  $v$  tels que  $d = uf + vg$ .

(a)  $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$  et  $g = X^2 - X - 1$ .

(b)  $f = 2X^3 + X^2 + X - 1$  et  $g = 2X^3 - 7X^2 + 7X - 2$ .

(c)  $f = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$  et  $X^3 - 1$ .

**Exercice 5.** Trouver un ppcm des polynômes  $f, g$  de l'exercice 4.

**Exercice 6.** (a) Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}[X]$ . Montrer que les polynômes  $P + X + 1$  et  $(X - 1)P + X^2 + 1$  sont étrangers.

(b) Selon le polynôme  $P$ , quels sont les pgcd de  $P + X + 2$  et  $(X - 1)P + X^2 - 1$  ?

**Exercice 7.** Montrer que  $f$  et  $g$  sont étrangers et  $f$  et  $h$  sont étrangers si et seulement si  $f$  et  $gh$  sont étrangers.

**Exercice 8.** Soient  $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$ . En utilisant le théorème de Bezout, montrer que si  $f$  et  $g$  sont étrangers alors:

(a) si  $f$  divise  $gh$  alors  $f$  divise  $h$ .

(b) si  $h$  divise  $f$  alors  $h$  et  $g$  sont étrangers