

M102 TD3

Exercice 1

- (a) Montrer que $\forall n > 0$ l'entier $8^n - 1$ est divisible par 7.
- (b) Sans utiliser la méthode de récurrence, montrer que $\forall n > 0$ la dernière chiffre de l'entier 6^n est le 6.

Exercice 2

Calculer le pgcd et le pgmc de $A(X)$ et $B(X)$ dans le cas suivantes:

- a) $A(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + X + 3$ $B(X) = X^6 + X^5 + 3X + 1$
- b) $A(X) = X^8 + X^7$ $B(X) = X^8 - X^7 + 3X^6 + 5X^5$
- c) $A(X) = X^3 + 2X^2 - 2X + 1$ $B(X) = X^3 + 3X^2 - 3X + 1$
- d) $A(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 - 2X + 1$ $B(X) = X^5 + 3X^4 + X^3 + 2X^2 + 2$

Exercice 3

Determiner le pgcd entre $A(x)$ et $B(X)$, sans utiliser l'algorithme euclidien, dans les cas suivantes:

- a) $A(X) = X^3 - X$ $B(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 2X$
- b) $A(X) = X^5 - 2X^4 + 3X^2 - 4X^2$ $B(X) = X^2 - 6X + 8$
- c) $A(X) = (X - 3)^n - 1$ $B(X) = X^2 + 5X + 6$ $n > 0$
- d) $A(X) = X^2 - 1$ $B(X) = X^{n+1} + X^n - 2$ $n > 2$

Exercice 4 Trouver des polynômes $A(X), B(X)$ tel que

$$A(X)P(X) + B(X)Q(X) = X$$

où $P(X) = (X^3 - 1)^2 + 2(X^3 - 1) + 1$ et $Q(X) = (X^3 - 1)^2 + 4(X^3 - 1) + 4$.

Exercice 5

- (a) Determiner les entiers $m \in \mathbb{N}$ pour lesquelles existent des polynômes $A_m(X)$ et $B_m(X)$ tel que

$$(X^m - 1)A_m(X) + (X + 1)B_m(X) = X + 3$$

- (b) Sous les conditions déterminées au point (a), calculer $A_m(X)$ et $B_m(X)$.

Exercice 6 Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2. Determiner les conditions nécessaires et suffisantes sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ afin que:

$$\text{pgcd}(P(X), P'(X)) \neq 1$$

Exercice 7 Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Determiner les condition nécessaire et suffisantes sur les racines de $P(X)$ pour qu'il existe des polynômes $A(X)$ et $B(X)$ tel que:

$$A(X)P(X) + B(X)P'(X) = X + 1.$$

Exercice 8 Soit $P(X)$ un polynôme non nul. Montrer que $\forall n > 1$ ils existent $A_n(X)$ et $B_n(X)$ tels que:

$$(A_n(X) + B_n(X))P^{n+1}(X) + A_n(X)P^n(X) + B_n(X)P^{n-1}(X) - 2A_n(X) = 1$$

Exercice 9 Soit $P(X)$ un polynôme de degré $n > 2$. Supposons que $P(1) = a$ et $P'(1) = b$. Calculer le pgdc entre $P(X)$ et $Q(X) = P(X) + X^2 - 2X + 1$ en fonction de a et b .