TD n°4
PGCD, PPCM, Polynômes premiers entre eux, Racine de polynôme

Exercice 1

$$A(X) = (X+3)^2(X+1)(X^2+1)^3$$
$$B(X) = (X+3)^2(X+2)^2(X^2+1)$$
$$C(X) = (X+3)(X+2)(X^2+1)^2$$

1. Combien A possède de diviseurs normalisés ? B et C ?
2. Donner le pgcd et le ppcm de A et B.
3. Donner le pgcd et le ppcm de A, B et C.

Exercice 2

On considère le polynôme :

$$P(X) = aX^2 + bX + c, \quad a, b, c \in IR, \quad a \neq 0.$$

1. Calculer le polynôme dérivé de P.
2. Calculer le reste R de la division euclidienne de P par P'.
3. A quelle condition sur a, b et c, $R = 0$? Interpréter ce résultat.

Exercice 3

1. Soit $P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0$ avec $\forall 0 \leq i \leq n, a_i \in Z$.

   Montrer que si $\dfrac{p}{q}$ est une racine rationnelle de P avec p et q premiers entre eux, alors p divise a_0 et q divise a_n.
2. Application : Montrer que le polynôme $2X^3 + X^2 - X + 1$ est irréductible dans $Q[X]$.

Exercice 4

Soit $f \in IR[X]$ de degré n.

Soit $a_0, a_1, ..., a_n \in IR$. On pose $b_0 = f(a_0), b_1 = f(a_1), ..., b_n = f(a_n)$.

Pour tout entier $i, 0 \leq i \leq n$, on considère le polynôme :

$$L_i(X) = \frac{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (X - a_j)}{\prod_{j=0, j\neq i}^{n} (a_i - a_j)}.$$

1. Pour $n = 2$, écrire les polynômes L_0, L_1, L_2.
2. Calculer pour tout $0 \le i, k \le n$, $L_i(a_k)$.
3. On considère le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i$.

   Vérifier que pour tout $0 \le k \le n$, a_k est une racine de $f - P$.

   En déduire que $f = P$.
4. Application : Montrer qu'il existe un unique polynôme f de degré au plus 3 tel que $f(0) = 6, f(1) = 2, f(2) = 0, f(3) = 6$ et donner son expression.

Exercice 5

On considère le polynôme $Q(X) = X^3 - pX - q$, avec p, q réels ou complexes.

1. Calculer le polynôme dérivé de Q.
2. Montrer que le reste de la division euclidienne de Q par Q' est $T(X) = -\frac{2p}{3} X - q$.
3. On suppose que $p = 0$ et $q \ne 0$. Montrer que Q et Q' sont premiers entre eux.
4. On suppose que $p \ne 0$. Calculer le reste U de la division euclidienne de Q' par T.

   Conclure que Q et Q' sont premiers entre eux si et seulement si $4p^3 - 27q^2 \ne 0$.

Exercice 6

Soient $f, g \in IR[X]$.

Les assertions sont-elles vraies ou fausses ?

Justifier votre réponse par une démonstration ou un contre-exemple.

1. Si f et g sont premiers entre eux sur le corps C des complexes, alors ils n'ont pas de racine complexe commune.
2. Si f et g n'ont pas de racine complexe commune, alors ils sont premiers entre eux sur C.
3. Si f et g sont premiers entre eux sur C, alors ils n'ont pas de racine réelle commune.
4. Si f et g n'ont pas de racine réelle commune, alors ils sont premiers entre eux sur C.
5. Si f et g sont premiers entre eux sur IR, alors ils n'ont pas de racine complexe commune.
6. Si f et g n'ont pas de racine complexe commune, alors ils sont premiers entre eux sur IR.
7. Si f et g sont premiers entre eux sur IR, alors ils n'ont pas de racine réelle commune.
8. Si f et g n'ont pas de racine réelle commune, alors ils sont premiers entre eux sur IR.
9. Si f et g sont premiers entre eux sur IR, alors ils le sont sur C.
10. Si f et g sont premiers entre eux sur C, alors ils le sont sur IR.

Mêmes questions si $f, g \in C[X]$.