TD 5 – M102 – Géométrie et Polynômes

Exercice 1 (a) Soit $f \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est une racine de f si et seulement si $\overline{z}$ est une racine de f.
(b) En déduire que tout polynôme f de degré impair a au moins une racine réelle.
(c) Montrer que $(X - z)(X - \overline{z}) \in \mathbb{R}[X]$.
(d) Décomposer $X^4 + 1$ en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Exercice 2. Soit f un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On dit que a est une racine de f d'ordre n, si $(X - a)^n$ divise f et $(X - a)^{n+1}$ ne le divise pas.
Montrer par récurrence sur n que a est une racine d'ordre n si et seulement si $f(a) = f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Exercice 3. Montrer que le polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$ admet une racine multiple. Application: déterminer les racines du polynôme $3X^5 - 5X^4 + 5X - 3$.

Exercice 4. (1) Montrer que le polynôme $P(X) = X^5 - X^2 + 1$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.
(2) Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle (qu'on calculera). En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 5.

(i) Décomposer les polynômes suivants en produit de facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$, puis de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X^3 - X^2 - X - 2, Q = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1, R = X^3 - 2X^2 + X - 2, S = X^2 + 3X + 4$$

Sont-ils irreductibles dans $\mathbb{R}[X]$, dans $\mathbb{C}[X]$? Déterminer un pgcd des polynômes P et Q, puis Q et R, et enfin R et S.

(ii) Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner selon les valeurs de a la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme $X^4 + (a+1)X^2 + a$. Pour quelles valeurs de a, est-il premier avec $X^3 - 3X^2 + 2X$.

Exercice 6.
(1) Donner les racines 5èmes de l'unité et factoriser $z^5 - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
(2) Donner la somme de ces racines.
(3) En déduire que $1 + \cos(\frac{2\pi}{5}) + \cos(\frac{4\pi}{5}) + \cos(\frac{6\pi}{5}) + \cos(\frac{8\pi}{5}) = 0$.
(4) Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels. Calculer sa valeur.