TD n°5
Racine de polynôme et polynômes irréductibles

Exercice 1

1. Soit $f \in IR[X]$.
   Montrer que $z \in C$ est une racine de f si et seulement si $\bar{z}$ est une racine de f.
2. En déduire que tout polynôme f de degré impair a au moins une racine réelle.
3. Montrer que $(X - z)(X - \bar{z}) \in IR[X]$.
4. Décomposer $X^4 + 1$ en produit de deux polynômes de degré 2 à coefficients réels.

Exercice 2

$$P(X) = X^3 - X^2 - X - 2$$
$$Q(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1$$
$$R(X) = X^3 - 2X^2 + X - 2$$
$$S(X) = X^2 + 3X + 4$$

1. Décomposer ces polynômes dans $C[X]$ puis dans $IR[X]$.
2. Donner le pgcd de P et Q, puis de Q et R, et enfin de R et S.

Exercice 3

Soit $a \in IR$. On considère le polynôme suivant :

$$P(X) = X^4 + (a+1)X^2 + a.$$

1. Donner, selon les valeurs de a, la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P.
2. Pour quelles valeurs de a, P est-il premier avec $Q(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$?

Exercice 4

Soit $P(X) = \left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P dans $IR[X]$.

Exercice 5 : Méthode de Cardan

Pour les équations polynomiales, le problème le plus naturel est de chercher des formules explicites donnant les valeurs des racines. Depuis l'antiquité, on sait résoudre les équations du second degré (méthode du discriminant). Il se trouve que l'équation du troisième degré est encore « résoluble par radicaux » (c'est-à-dire que l'on peut trouver des formules exprimant les solutions uniquement en fonction des coefficient « a_i » de l'équation). La résolution de l'équation du troisième degré a été abordée au XIIIème siècle et a été complètement achevée par le mathématicien italien Cardan (1501-1576).

On désire résoudre l'équation $X^3 + pX + q = 0$ où $p, q \in IR$.

1. Montrer que toute équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ peut en effet se ramener à une équation du type précédent grâce à un changement de variable du type $X = x + \alpha$.
2. Montrer l'existence de deux nombres complexes u et v vérifiant $\begin{cases} u+v = X \\ uv = \dfrac{-p}{3} \end{cases}$.
3. En déduire que l'équation étudiée est équivalente au système en (u,v) suivant :
$$\begin{cases} u+v = X \\ u^3 + v^3 = -q \\ (uv)^3 = \dfrac{-p^3}{27} \\ uv \in IR \end{cases}.$$
4. En déduire que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré. On note δ^2 la valeur absolue du discriminant de cette équation ($\delta > 0$). Exprimer u^3 et v^3 en fonction de q et δ et terminer la résolution.
5. Application : Résoudre $x^3 + 3x^2 + 15x + 76 = 0$ et $x^3 - 12x - 8\sqrt{2} = 0$.

Exercice 6

1. Donner les racines 5èmes de l'unité et factoriser $z^5 - 1$ dans $C[X]$.
2. Donner la somme de ces racines.
3. En déduire que $1 + \cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{6\pi}{5}\right) + \cos\left(\dfrac{8\pi}{2}\right) = 0$.
4. Montrer que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est racine d'un polynôme de degré 2 à coefficients réels.

   Calculer sa valeur.