TD n°6
Formule de Taylor , racines et Polynômes irréductibles

Exercice 1

1. Enoncer la formule de Taylor.
2. Ecrire les polynômes suivants sous la forme : $a_n(X-1)^n+\ldots+a_1(X-1)+a_0$

$$P(X)=X^3+X^2+3X+1$$
$$Q(X)=X^4-X^3+X^2-X+2$$
$$R(X)=(X+1)^n$$
$$S(X)=X^n+\ldots+X+1$$

3. Déterminer les polynômes de $IR[X]$ tels que $P(1)=2, P'(1)=3, P''(1)=4$ et $\forall n\geq 3, P^{(n)}(1)=0$.

Exercice 2

On pose $P(X)=X^5+X^4+X^3+X^2+X+1, Q_1(X)=X^3+1$ et $Q_2(X)=X^2+X+1$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q_1 et par Q_2. Que remarque-t-on ?
2. Décomposer Q_1 et Q_2 en produits de facteurs irréductibles sur IR puis sur C.
   (Rappel : $j=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$).
3. Justifier que Q_1 et Q_2 sont premiers entre eux.
4. En déduire la décomposition de P en produits de facteurs irréductibles sur IR puis sur C.

Exercice 3

Soit P le polynôme complexe défini par
$P(X)=\left(X^2+(i-1)X+7i+4\right)(X+2i+1)(X-3i-2)$.

1. Montrer que $P\in IR[X]$.
2. Est-ce que P est irréductible dans $IR[X]$? Si oui, démontrer-le. Sinon, déterminer des polynômes réels non constants A et B tels que $P=AB$.

Exercice 4

1. Montrer que pour tout $n \in IN, n \geq 2$, le polynôme
   $P_n(X) = 1 + \frac{1}{1!}X + \frac{1}{2!}X^2 + ... + \frac{1}{n!}X^n$ n'a que des racines simples dans C.
2. Montrer que pour tout $n \in IN, n \geq 2$, le polynôme $P_n(X) = X^n - X + 1$ n'a que des racines simples dans C.

Exercice 5

Décomposer $X^{12} - 1$ en produit de facteurs irréductibles dans $IR[X]$.

Exercice 6

Le problème qui suit a pour but d'obtenir la valeur exacte de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ce résultat peut être obtenu par d'autres méthodes issues de théories plus élaborées (séries de Fourier ou calcul des résidus). La méthode suivante est (bien qu'astucieuse) très élémentaire ; elle fournit une application intéressante de la théorie des équations algébriques en analyse, ce qui permet d'entrevoir les connexions entre les divers domaines des mathématiques.

Pour tout entier naturel non nul p, on pose

$$\alpha_p = \sum_{n=1}^{p} \cot^2\left(\frac{n\pi}{2p+1}\right) \text{ et } \beta_p = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{n\pi}{2p+1}\right)}.$$

1. Exprimer $u_n = \cot\left(\frac{n\pi}{2p+1}\right)$ en fonction de $z_n = \exp\left(\frac{2in\pi}{2p+1}\right)$.
   En déduire que les nombres $iu_1, iu_2, ..., iu_p$ et leur opposé sont les racines du polynôme $(X+1)^{2p+1} - (X-1)^{2p+1}$.
2. Etablir finalement que $\alpha_p = \frac{p(2p-1)}{3}$ et $\beta_p = \frac{p(2p+2)}{3}$.
   (On pourra commencer par remarquer que $\alpha_p = -\sum_{n=1}^{p} \left(\frac{z_n+1}{z_n-1}\right)^2$).
3. On rappelle que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cot(x) \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sin(x)}$.
   En déduire : $\frac{\pi^2 \alpha_p}{(2p+1)^2} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\pi^2 \beta_p}{(2p+1)^2}$.
   Puis calculer $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.