TD n°8 Applications des nombres complexes à la géométrie

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et identifié à l'ensemble C des nombres complexes par :

$$M(x,y) \mapsto x+iy = z,$$

z est appelé l'affixe du point M .

Exercice 1

1. Quelle(s) condition(s) géométrique(s) doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit réel ?
2. Quelle(s) condition(s) géométrique(s) doivent vérifier les points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2 pour que $\frac{z_1}{z_2}$ soit imaginaire pur ?
3. Soit $z = a+ib$. Ecrire $\frac{z-1}{z+1}$ sous forme $A+iB$. Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que l'argument de $\frac{z-1}{z+1}$ soit $\frac{\pi}{2}$.
4. Déterminer géométriquement et par le calcul l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que :
$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = 1.$$
5. Déterminer par le calcul l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que :
$$\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
et donner une interprétation géométrique.
6. Mettre sous forme trigonométrique $e^{i\theta}+1$ et $e^{i\theta}-1$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Exercice 2

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que $1 + j + j^2 = 0$.
2. Montrer que $\overline{j} = j^2$.
3. Soient $z_0 = 1 + i,\ z_1 = jz_0$ et $z_2 = j^2 z_0$. On note $M_0,\ M_1$ et M_2 les points d'affixes $z_0,\ z_1$ et z_2 respectivement. Montrer que $M_0 M_1 M_2$ est un triangle équilatéral.
4. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b, c. Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = -j$ ou $-\overline{j}$. En déduire que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $aj^2 + bj + c = 0$ ou $aj + bj^2 + c = 0$.

Exercice 3

Soit $g : P \to P$ qui à tout point M d'affixe $z \neq -1$ associe le point $g(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{1-z}{1+z}$.

1. Calculer $z' + \overline{z'}$ pour $z / |z| = 1$.
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre O privé du point de coordonnées $(-1,0)$ par l'application g.

Exercice 4

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que :
$$\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1).$$
2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes $z,\ z^2$ et z^3 soit rectangle au point d'affixe z.